

---

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2023

---

**Série 5**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (\*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (\*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1.** (+) Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  une base de  $V$ . Soit  $f : V \times V \rightarrow K$  une forme bilinéaire symétrique telle que

$$f(v_1, v_1) = 2, f(v_2, v_2) = 3, f(v_3, v_3) = -1, f(v_1, v_2) = 0, f(v_2, v_3) = 1, f(v_3, v_1) = -2.$$

1. Écrire la matrice  $A_B^f$  de la forme bilinéaire  $f$  pour la base  $B$ .
2. Trouver une base orthogonale  $C = \{w_1, w_2, w_3\}$  pour  $V$  par rapport à la forme bilinéaire  $f$ .

**Exercice 2.** Soit  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si elles ont le même spectre.

VRAI

FAUX

2. Si les matrices  $A$  et  $B$  ont le même spectre  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  et sont toutes les deux diagonalisables, alors  $A$  et  $B$  sont semblables.

VRAI

FAUX

3. Si  $p_A(B) = 0$ , alors  $A$  et  $B$  sont semblables.

VRAI

FAUX

4. Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $p_A(B) = 0$ .

VRAI

FAUX

**Exercice 3.** Soit  $V$  de dimension finie et  $B$  une base de  $V$ . Montrer que deux formes bilinéaires  $f, g : V \times V \rightarrow K$  sont différentes si et seulement si  $A_B^f \neq A_B^g$ .

**Exercice 4.** Soit  $V$  de dimension finie et  $B$  une base de  $V$ . Montrer que une forme bilinéaire  $f : V \times V \rightarrow K$  est symétrique si et seulement si  $A_B^f$  est symétrique.

**Exercice 5.** Soit  $V = \mathbb{R}_3[x]$ , l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 sur  $\mathbb{R}$ , muni de la forme

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

1. La forme est-elle bilinéaire ? Symétrique ? Non dégénérée ?
2. Décrire la matrice  $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  pour  $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ .
3. Montrer que l'ensemble  $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  de polynômes

$$\begin{array}{ll} p_0 = 1 & p_1 = x \\ p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & p_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{array}$$

est une base orthogonale de  $V$ .

**Exercice 6.** On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Est-ce que  $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$  possède une base orthogonale par rapport à la forme bilinéaire symétrique standard ?

**Exercice 7.** Montrer que la relation de congruence  $\cong$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices  $K^{n \times n}$ .

Rappel : deux matrices  $A, B \in K^{n \times n}$  sont *congruentes* s'il existe une matrice  $P \in K^{n \times n}$  inversible telle que  $A = P^T B P$ .

**Exercice 8.** (\*) Soit  $K$  un corps de caractéristique différente de 2, et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Considérons une forme bilinéaire  $f$  sur  $V$  qui est **anti-symétrique**, c'est-à-dire

$$f(x, y) = -f(y, x) \quad \forall x, y \in V.$$

Montrer que si  $f$  est non dégénérée, alors  $n$  est pair.

L'implication inverse est-elle vraie ?