Exercice bonus 3. Soit p un nombre premier. On dit qu'un anneau commutatif est de *caractéristique p* si le morphisme $\mathbb{Z} \to A$ envoie p sur zéro et donc factorise par $\mathbb{F}_p \to A$. **Dans cet exercice, on travaille uniquement avec des anneaux non-nuls commutatifs de caractéristique p.** On note $F : A \to A$ le *morphisme de Frobenius* $a \mapsto a^p$. Voir *Série 3, exercice 4.3.*

1. Montrer que le morphisme $\mathbb{F}_p \to A$ est injectif.
2. Montrer que $A^F := \{a \in A \mid F(a) = a\}$ est un sous-anneau.
3. Montrer que si A est intègre et $A = A^F$, alors $\mathbb{F}_p \to A$ est un isomorphisme.
4. Montrer que si $A = A^F$, alors tout idéal premier est maximal.
5. Montrer que $\pi_0(A) = \pi_0(A^F)$. (Voir *exercice bonus 2.*)

Solution.

1. Comme A est non-nul, et que les seuls idéaux de $\mathbb{F}_p$ sont l'idéal nul et $\mathbb{F}_p$, il suit que $A \to \mathbb{F}_p$ est injectif. En effet, si le noyau est égal à $\mathbb{F}_p$ cela implique que 1 est envoyé sur 0 et donc que l'anneau d'arrivé est nul, ce qui est exclu par hypothèse.

   Barême. 10 points.

2. Cela suit du fait que F est un morphisme d'anneau. En effet, $0, 1 \in A^F$ et si $a, b \in A^F$ alors $F(a + b) = F(a) + F(b) = a + b$ et $F(ab) = F(a)F(b) = ab$. On conclut donc que A^F est un sous-ensemble de A qui contient 0 et 1, et stable par addition et multiplication, donc un sous-anneau.

   Barême. 10 points.

3. Si $a \in A$ est nilpotent, alors il existe n tel que $a^n = 0$. Soit alors N suffisamment grand tel que $p^N \geq n$. On obtient alors $a = a^{p^N} = 0$. On conclut donc que $\mathrm{nil}(A) = 0$.

   Barême. 10 points.

4. On sait déjà par le premier point que $\mathbb{F}_p \to A$ est injectif. Notons que $A = A^F$ signifie que $a^p = a$ pour tout $a \in A$.

   Par l'absurde on suppose que $|A| \geq p + 1$. Notons dès lors $a_1, \ldots a_{p+1}$ des éléments distincts de A. On mène la division euclidienne de $t^p - t$ par $t - a_1$ pour obtenir un $f_1(t) \in A[t]$ tel que

   $$t^p - t = (t - a_1)f(t) + a$$

   pour $a \in A$. En évaluant en a_1, on obtient que $a = 0$. *Maintenant, on utilise de manière cruciale que A est intègre* pour voir que pour $i \geq 2$ on a $f(a_i) = 0$. En effet en évaluant en a_i on a

   $$0 = (a_i - a_1)f(a_i),$$

   et donc comme $a_1 \neq a_i$ et que A est intègre, on voit que $f(a_i) = 0$. Ainsi, on peut continuer par récurence sur $2 \leq i \leq p + 1$ obtenir par le même procédé que

   $$t^p - t = (t - a_1) \cdots (t - a_{p+1})g(t)$$

   pour un $g(t) \in A[t]$. Ainsi par la formule du degré (notons qu'ici intègre n'est *pas* utilisé car tous les polynômes en jeu sont moniques) on voit que

   $$p = \deg(t^p - t) \geq p + 1,$$

une contradiction.

Barème. 10 points pour avoir l'idée de diviser le polynôme $t^p - t$. 10 points pour utiliser l'hypothèse d'intégrité. 10 points si la preuve est correcte.

5. Soit $\mathfrak{p}$ premier de A. Alors $A/\mathfrak{p}$ est encore fixé par le Frobenius. On conclut alors avec le point précédent. En effet, il suit que le morphisme

$$\mathbb{F}_p \to A \to A/\mathfrak{p}$$

est un isomorphisme. Dès lors comme $A/\mathfrak{p}$ est un corps, il suit que $\mathfrak{p}$ est maximal.

Barème. 10 points pour se réduire au cas intègre. 10 points pour utiliser le point précédent et conclure.

6. On commence par montrer que A est connexe si et seulement si A^F est connexe. Tout d'abord, notons que tout les idempotents de A sont dans A^F et donc les idempotents de A et de A^F sont en bijection. Comme un anneau non-nul est connexe si et seulement si les seuls idempotents sont 0 et 1, notre assertion suit.

Notons désormais que $\pi_0(A) = \pi_0(A^F)$ suivrait de, si $e \in A$ est un idempotent

$$(eA)^F = eA^F.$$

On montre alors cette dernière égalité. Notons que $eA^F \subset (eA)^F$. Pour l'inclusion inverse, il suffit simplement de noter que si $(ea)^p = ea$, alors $ea = e(ea) \in eA^F$.

Barème. Si on a procédé comme au-dessus, 10 points pour montrer que A et connexe si et seulement si A^F est connexe, puis 10 points pour conclure.