# Corrigé série 22

**Exercice 1** (10 points)

a) $\displaystyle\int_0^4 x \,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 8 - 0 = 8.$

b) $\displaystyle\int_1^3 (u^2+1)\,\mathrm{d}u = \left(\frac{1}{3}u^3 + u\right)\Big|_1^3 = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}.$

c) $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = (\ln|v|)|_2^7 = \ln 7 - \ln 2 = \ln\frac{7}{2} \approx 1.25276.$

d) $\displaystyle\int_{-3}^2 e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\Big|_{-3}^2 = -\frac{e^{-4}-e^6}{2} \approx 201.70524.$

e) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-2}^2 = 4 - 4 = 0.$

**Exercice 2** (5 points)

Commençons par calculer

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = (-\cos x)|_0^\pi = 2.$$

Ainsi, on veut trouver $c \in [0,\pi]$ tel que

$$\sin(c)\cdot\pi = 2.$$

En résolvant cette équation avec arcsin, on trouve deux valeurs de $c$,

$$c = \arcsin\frac{2}{\pi} \approx 0.69 \quad \text{ou} \quad c = \pi - \arcsin\frac{2}{\pi} \approx 2.45.$$

**Exercice 3** (10 points)

a) $3x + c$

b) $\dfrac{5u^2}{2} + c$

c) $-\dfrac{3t^5}{5} + c$

d) $\dfrac{t^6}{2} + \dfrac{2t^5}{5} - t + c$

e) $-\dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{x}{4} + c$

f) $-\dfrac{1}{u^2} + c$

g) $\dfrac{2\sqrt{t^3}}{3} + c$

h) $\dfrac{(t+3)^4}{4} + c$

i) $\dfrac{(3x^2+x)^5}{5} + c$

j) $-\dfrac{e^{-3u}}{3} + c$

k) $\dfrac{\ln|3t+1|}{3} + c$

l) $\dfrac{(\ln|t|)^4}{4} + c$

m) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

n) $\dfrac{1}{3}\sin^3(u) + c$

o) $\dfrac{1}{12}(2t^2+4t)^3 + c$

**Exercice 4** (5 points)

Soit $F$ une primitive de $e^{(\sin t)^2}$, donc

$$f(x) := \int_0^x e^{(\sin t)^2}\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(x) = e^{(\sin x)^2}, \quad \text{et} \\ f''(x) &= F''(x) = e^{(\sin x)^2}\sin(2x), \end{aligned}$$

et donc $f''$ change de signe en $x = 0$.

**Exercice 5** (10 points)

a) Faux. Considérer $f(x) = 2$, et $[a,b] = [0, 1/2]$.

b) Vrai. Il suffit d'utiliser la proposition 1.4 des notes de cours et le fait que

$$|f| = f^+ + f^-.$$

c) Faux. Définissons, pour $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

On voit facilement que $f$ n'est pas intégrable (les sommes de Darboux inférieures valent $-1$, et les supérieures valent 1). Cependant, $|f| = 1$ est intégrable.

d) Vrai. Soit $F$ une primitive de $f$, donc $F' = f$. Ainsi,

$$h(x) = F(x) - F(a) \quad \text{et} \quad g(x) = F(x) - F(c),$$

ce qui implique que

$$h(x) - g(x) = F(c) - F(a)$$

est une constante. Ainsi,

$$h'(x) - g'(x) = 0,$$

comme la dérivée d'une constante est nulle.

e) Vrai. Un calcul direct donne $\ln 2$ comme valeur de l'intégrale.

f) Faux. La fonction n'est pas définie en $x = 0$.

g) Faux. Le membre de gauche vaut $2/3$ et celui de droite $0$.

h) Vrai. Pour le voir, on peut par exemple utiliser la définition de la dérivée. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période $P > 0$, alors

$$\begin{aligned} f'(x+P) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+P) - f(x+P)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x). \end{aligned}$$

i) Faux. La fonction $(x \mapsto 1 + \sin x)$ est périodique, mais ses primitives

$$x \mapsto x - \cos x + c$$

ne le sont pas.

**Exercice 6** (10 points)

a) La fonction $f$ est clairement continue [1]. Pour voir qu'elle est décroissante, on a les implications

$$x < y \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 < 1 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{1+y^2}.$$

b) En utilisant le point précédent,

$$s_{\sigma_n}(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(k/n)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

c) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = (\arctan x)\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

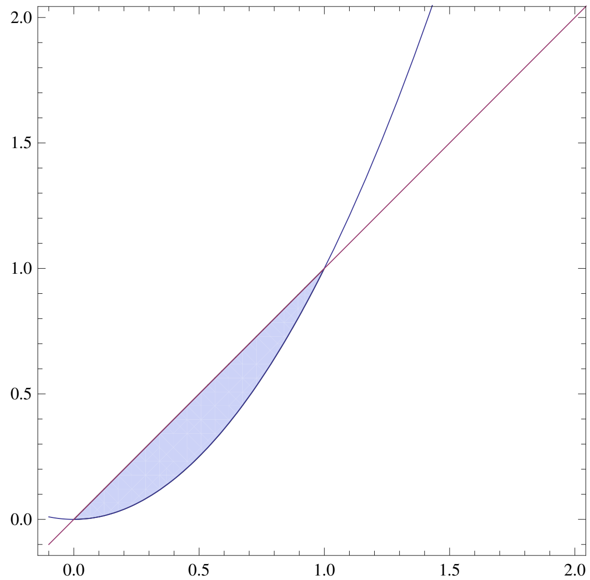
d) Cela découle des points précédents.

1. La composée de fonctions continues est une fonction continue. Or $x \mapsto 1 + x^2$ est continue, et $y \mapsto \frac{1}{y}$ est continue sur $[\varepsilon, \infty)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

**Exercice 7** (5 points)

On a illustré la situation dans la figure. On calcule

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$




**Exercice 8** (10 points)

a) On a

$$f'(x) = P'(x)e^{ax+b} + P(x)e^{ax+b}a = e^{ax+b}\underbrace{(P'(x) + aP(x))}_{:=Q(x)}.$$

b) Fixons $a \neq 0$, $b$ et $n$. Alors l'ensemble

$$V = \left\{ x \mapsto P(x)e^{ax+b} \;\middle|\; P(x) \text{ polynôme de degré } \leq n \right\}$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On sait que la dérivation sur cet espace est un endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & V \\ f & \longmapsto & f'. \end{array}$$

Cet endomorphisme est injectif comme $P(x)$ et $P'(x)$ n'ont (presque) jamais même degré. Ainsi, par le théorème du rang, $\pi$ est un automorphisme.

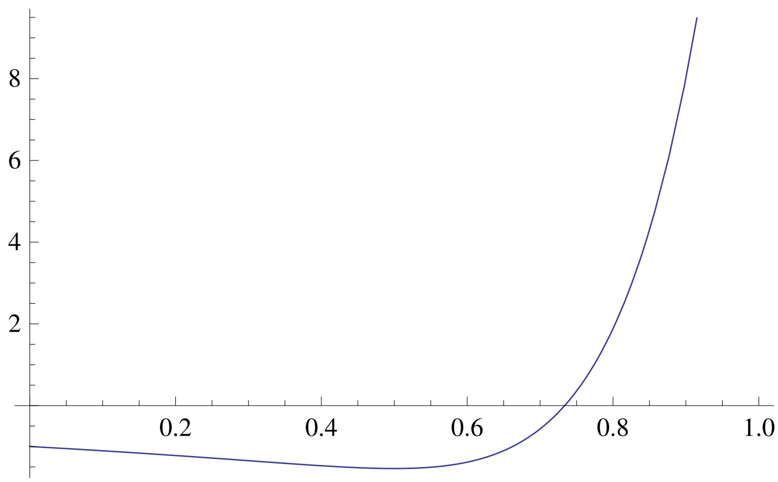
Avec la bijectivité de $\pi$ on a que, pour tout $f \in V$, une primitive de $f$ peut être trouvée dans $V$. De plus, comme $\pi$ conserve les degrés, cette primitive sera de même degré que $f$.

c)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + c,$$
$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = (x^2-4)e^{5x+1} + c,$$
$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = (x^8-1)e^x + c.$$

d) Pour calculer l'aire, on commence par demander à un ordinateur de calculer pour nous l'intersection de $h(x)$ avec $Ox$. On trouve

$$x \approx 0.733741.$$




Ainsi, l'aire est

$$\left((1-x^8)e^x\right)\Big|_0^{0.733741} + \left((x^8-1)e^x\right)\Big|_{0.733741}^{1} \approx 2.81575.$$

**Exercice 9** (5 points)

Il suffit de dériver le membre de droite de l'équation pour vérifier qu'il s'agit bien d'une primitive.

**Exercice 10** (10 points)

a) La fonction $F$ est croissante comme sa dérivée est positive.

b) Si $f$ n'est pas partout nulle, alors il existe un intervalle $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ et un $\varepsilon > 0$ tel que

$$f \geq \varepsilon \quad \text{sur} \quad [\alpha,\beta].$$

(Cela découle du fait que $f$ est continue et positive.)

Ainsi,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_\alpha^\beta \varepsilon\,\mathrm{d}t > 0.$$

c) Cette propriété s'obtient directement en considérant les sommes de Darboux.

d) On a vu à l'exercice  que

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{pour } x \geq 0,$$

ainsi il suit des points précédents que arctan est croissante (on utilise aussi que arctan est impaire).