

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 6 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Transformez les matrices réelles suivantes en matrices diagonales dont les éléments sont 0, 1 et -1 . Combien de 0, 1 et -1 sont sur la diagonale ? (Ces quantités sont appelées l'indice de nullité, l'indice de positivité et l'indice de négativité.)

$$(+)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. On va utiliser l'algorithme 3.1 pour diagonaliser A . On additionne -2 fois la première ligne sur la deuxième ligne pour obtenir $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ et -2 fois la première colonne sur la deuxième colonne pour obtenir la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Finalement, on multiplie la deuxième colonne par $1/5$ et on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. L'indice de nullité est donc $r_0 = 0$, l'indice de positivité est $r_+ = 1$, et l'indice de négativité est $r_- = 1$.
2. On additionne -1 fois la première ligne sur la deuxième ligne: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On additionne -1 fois la première colonne sur la deuxième colonne: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc l'indice de nullité est $r_0 = 1$, l'indice de positivité est $r_+ = 1$ et l'indice de négativité est $r_- = 0$.
3. On additionne -2 fois la première ligne sur la deuxième ligne et après -2 fois la première colonne sur la deuxième colonne pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On additionne -1 fois la première ligne sur la troisième ligne et après -1 fois la première colonne sur la troisième colonne pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

On additionne $-3/5$ fois la deuxième ligne sur la troisième ligne et après $-3/5$ fois la deuxième colonne sur la troisième pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

On multiplie la première colonne par $1/2$, la deuxième colonne par $1/5$ et la troisième colonne par $5/4$ pour avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'indice de nullité est $r_0 = 0$, l'indice de positivité est $r_+ = 2$, et l'indice de négativité est $r_- = 1$.

Exercice 2. Soit une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{R}^n telle qu'il existe deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

- $\langle u, u \rangle > 0$, et
- $\langle v, v \rangle < 0$.

Montrer qu'il existe un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\langle w, w \rangle = 0$.

En déduire que le procédé de Gram-Schmidt est parfois impossible si la forme bilinéaire n'est ni définie positive, ni définie négative.

Solution. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ le segment entre u et v :

$$f(t) = (1 - t)u + tv.$$

L'application $t \mapsto \langle f(t), f(t) \rangle$ est continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , elle est positive en 0 et négative en 1 . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $s \in (0, 1)$ tel que l'application s'annule.

Le vecteur $w = (1 - s)u + sv$ est un vecteur non nul car u et v sont non colinéaires et sa norme est nulle.

Le procédé de Gram-Schmidt sur la base $\{w, x\}$ est impossible pour un $x \in \mathbb{R}^n$ général, par exemple, car pour que $x - \alpha w$ soit perpendiculaire à w , on devrait avoir

$$\langle w, x - \alpha w \rangle = 0.$$

L'équation n'admet aucune solution si w et x ne sont pas déjà perpendiculaires. De plus, on peut montrer assez facilement que u et v ne peuvent pas tous les deux être perpendiculaires à w .

Exercice 3. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard dans \mathbb{R}^n . Trouver une factorisation $A = A^*R$ du corollaire 3.19 de la matrice

$$(+)\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}.$$

Solution. Nous trouvons une factorisation de A_2 , ce qui nous donne une factorisation de A_1 lorsque $n = 3$.

On utilise le procédé de Gram-Schmidt et on démontre la forme générale de la factorisation par récurrence.

Soient v_1, \dots, v_n les colonnes de $A = A_2$ et u_1, \dots, u_n les vecteurs obtenus par Gram-Schmidt. Si $i \geq j + 2$, on a $v_i \perp v_1, \dots, v_j$ et donc $v_i \perp u_1, \dots, u_j$ aussi, car $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(u_1, \dots, u_k)$ pour tout k . L'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut donc être simplifiée:

$$u_1 = v_1$$

$$u_{j+1} = v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j, \quad 1 \leq j \leq n - 1$$

Nous montrons par récurrence que

$$(u_j)_i = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{j} & i \leq j \\ 1 & i = j + 1 \\ 0 & i > j + 1 \end{cases}.$$

Pour $j = 1$, c'est vrai. Supposons que c'est vrai pour un $j \geq 1$. On obtient $\|u_j\|^2 = \frac{j+1}{j}$ et donc le coefficient de Fourier

$$\frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} = j/(j+1).$$

On a

$$\begin{aligned} (u_{j+1})_i &= \left(v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j \right)_i \\ &= \left(v_{j+1} - \frac{j}{j+1} u_j \right)_i \\ &= \begin{cases} 0 - \frac{j}{j+1} \frac{(-1)^{j+i}}{j} & i \leq j \\ 1 - \frac{j}{j+1} & i = j + 1 \\ 1 - 0 & i = j + 2 \\ 0 & i > j + 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{(j+1)+i}}{j+1} & i \leq j + 1 \\ 1 & i = j + 2 \\ 0 & i > j + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La matrice R'' est

$$R''_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{j}{j+1} & i = j - 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} .$$

Nous avons $A = A''R''$ comme désiré. Afin de normaliser les colonnes de A'' , nous multiplions la j -ième colonne u_j de A'' par $\|u_j\|^{-1}$ et la j -ième ligne de R'' par $\|u_j\|$. Ceci nous donne

$$A''R'' = \underbrace{A'' \begin{pmatrix} \|u_1\|^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \|u_n\|^{-1} \end{pmatrix}}_{=:A'} \underbrace{\begin{pmatrix} \|u_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|u_n\| \end{pmatrix}}_{R'} R'' .$$

Finalement, on a

$$A'_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j} (j(j+1))^{-1/2} & i \leq j \\ \sqrt{\frac{j}{j+1}} & i = j+1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et

$$R'_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{j-1}{j}} & i = j-1 \\ \sqrt{\frac{j+1}{j}} & i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} .$$

Pour la partie 1., ceci implique que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/12} \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6} & -\sqrt{1/12} \\ 0 & \sqrt{2/3} & \sqrt{1/12} \\ 0 & 0 & \sqrt{3/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & \sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} \end{pmatrix} .$$

Exercice 4. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Quelle est la distance entre u et $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$? La distance entre u et V est $\text{dist}(u, V) = \min_{v \in V} \|u - v\|$, où la norme $\|\cdot\|$ est par rapport au produit scalaire ordinaire.

Solution. Soit $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. La distance entre un vecteur u et un sous-espace V est par définition $\min_{v \in V} \|u - v\|$. En posant

$$A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^3\}$, donc $\min_{v \in V} \|u - v\| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|u - Ax\|$. On sait du cours que la solution x^* du système $A^T Ax = A^T u$ est un vecteur tel que $\|u - Ax\|$ est minimisée. Donc il suffit de résoudre ce système et alors $\|Ax^* - u\|$ est la réponse voulue.

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & A^T u &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (A^T A)^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, & (A^T A)^{-1} A^T u &= x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|Ax^* - u\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

est la réponse voulue.

Preuve alternative: On applique le procédé de Gram-Schmidt sur v_1, v_2, v_3, u pour obtenir une base orthogonale v'_1, v'_2, v'_3, u' . Alors, $u = u' + x$, où $x \in \text{span}(v_1, v_2, v_3)$ et $\|u'\| = \text{dist}(u, V)$ avec le théorème 2.21.

Exercice 5.

1. Soit V un espace vectoriel sur K avec une base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique, et $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $P^T A_B^{(\langle \cdot, \cdot \rangle)} P$ est une matrice diagonale.

Montrer que les éléments $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, où P_k est la k -ième colonne de P , forment une base orthogonale de V .

2. Soit maintenant V un espace vectoriel sur \mathbb{Z}_3 , $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base V et $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_3$ une forme bilinéaire symétrique t.q.

$$A_B^{(\langle \cdot, \cdot \rangle)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base orthogonale de V .

Solution.

1. Soient $D = P^T A_B^{(\cdot, \cdot)} P$ une matrice diagonale, et $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, c-à-d $u_k = \sum_{i=1}^n P_{i,k} v_i$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &= [u_i]_B^T A_B^{(\cdot, \cdot)} [u_j]_B \\ &= (P_i)^T A_B^{(\cdot, \cdot)} P_j \\ &= (P e_i)^T A_B^{(\cdot, \cdot)} P e_j \\ &= e_i^T (P^T A_B^{(\cdot, \cdot)} P) e_j \\ &= e_i^T D e_j \\ &= D_{i,j}, \end{aligned}$$

où $D_{i,j}$ est égale à zéro si $i \neq j$. Les vecteurs u_k sont donc orthogonaux et linéairement indépendants, parce que P est inversible.

2. On applique l'algorithme 3.1 du cours. Pour trouver la matrice P , on reporte toutes les opérations faites sur la matrice A à une matrice identité I .

(a) On commence avec $A_0 = A_B^{(\cdot, \cdot)}$, $P_0 = I$.

(b) On échange les lignes 1 et 3, puis les colonnes 1 et 3 de A_0 . On fait de même sur P_0 . On obtient

$$A_1 = P_1^T A_B^{(\cdot, \cdot)} P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) On additionne -2 ($= 1$) fois la ligne 1 à la ligne 2 de A_1 et similairement pour les colonnes. On fait de même sur P_1 . On obtient

$$A_2 = P_2^T A_B^{(\cdot, \cdot)} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) On additionne -1 ($= 2$) fois la ligne 1 à la ligne 3 de A_2 et similairement pour les colonnes. On fait de même sur P_2 . On obtient

$$A_3 = P_3^T A_B^{(\cdot, \cdot)} P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a ainsi trouvé une matrice

$$P = P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

telle que

$$P^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Une base orthogonale de V est donc donnée par les vecteurs

$$u_1 = v_3, \quad u_2 = v_2 + v_3, \quad u_3 = v_1 + 2v_3$$

où on a utilisé le premier point de cet exercice.

Exercice 6. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y \rangle = x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Montrer que \mathbb{Z}_2^2 ne possède pas de base orthogonale.

Solution. On note

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v_1 = (a, b)^T$ et $v_2 = (c, d)^T$ deux vecteurs non nuls orthogonaux, i.e. tels que

$$v_1^T C v_2 = (a, b) C \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad + bc = 0.$$

Si un des coefficients est nul, par exemple (et sans perte de généralité) si $a = 0$:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad d \neq 0,$$

où la 1-ère et 3-ère implications découlent de l'hypothèse que les vecteurs sont non nuls. Par conséquent, les vecteurs sont linéairement dépendants. D'autre part, si tous les coefficients sont non nuls, on sait que $ad = bc$ parce que le corps est de caractéristique 2. Or,

$$ad = bc \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} ab^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} cd^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = bd^{-1} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

ce qui montre que les vecteurs sont de nouveau linéairement dépendants. On conclut que si v_1, v_2 sont orthogonaux, alors les vecteurs ne sont pas libres. En particulier, il n'existe pas de base orthogonale de \mathbb{Z}_2^2 muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Autre façon : l'égalité $ad + bc = 0$ est équivalente à $ad - bc = 0$ en caractéristique 2. On reconnaît là le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2)$. Celui-ci étant nul, la matrice n'est pas inversible et les vecteurs v_1 et v_2 ne peuvent former une base de \mathbb{Z}_2^2 .

Exercice 7. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

- a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2$.
 b) Montrer que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i , $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Solution. Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient $v_1, \dots, v_n \in V$ des vecteurs deux à deux orthogonaux (c'est-à-dire $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $1 \leq i \neq j \leq n$).

- a) On va montrer que $\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2$. Par définition,

$$\begin{aligned} \|v_1 + \dots + v_n\|^2 &= \langle v_1 + \dots + v_n, v_1 + \dots + v_n \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i=j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 \end{aligned}$$

où dans la 3ème ligne, on a utilisé le fait que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

- b) Supposons que l'ensemble $\{v_1, \dots, v_n\}$ ne soit pas libre. Alors il existe des coefficients $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$. Soit $c_i \neq 0$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, v_i \rangle \\ &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \langle v_j, v_i \rangle \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

parce que $c_i \neq 0$ et $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$; donc on arrive à une contradiction. Alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ est un ensemble libre.

Exercice 8. Soit V un espace euclidien de dimension finie avec une base orthonormale $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Montrer que pour tout $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i.$$

2. Pour $f, g \in V$, montrer l'identité de Parseval :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n \langle f, v_i \rangle \langle v_i, g \rangle.$$

Solution.

1. Soit $v \in V$ avec $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$ pour quelques $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle v, v_k \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Ca implique que

$$v = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle v_k.$$

2. On utilise 1.:

$$\langle f, g \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle f, v_k \rangle v_k, \sum_{k=1}^n \langle g, v_k \rangle v_k \right\rangle \quad (1)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\langle \langle f, v_k \rangle v_k, \sum_{i=1}^n \langle g, v_i \rangle v_i \right\rangle \quad (2)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \langle \langle f, v_k \rangle v_k, \langle g, v_i \rangle v_i \rangle \quad (3)$$

$$= \sum_{k=1}^n \langle \langle f, v_k \rangle v_k, \langle g, v_k \rangle v_k \rangle \quad (4)$$

$$= \sum_{k=1}^n \langle f, v_k \rangle \langle g, v_k \rangle. \quad (5)$$

Dans (2) et (3), nous avons utilisé le fait qu'une forme bilinéaire est linéaire par rapport à un élément. Dans (4) et (5), nous avons utilisé l'orthonormalité.

Exercice 9. Soit $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux par rapport au produit scalaire standard.

Posons $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice dont les colonnes sont les $\{a_i\}_{i=1}^m$, et $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im}(A)$ la projection orthogonale sur l'espace $\text{span}(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Par définition, $\Pi(v) = \arg \min_{u \in \text{Im}(A)} \|u - v\|$.

1. Montrer que $m \leq n$ à l'aide de l'exercice 7.
2. Montrer que $\Pi(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, a_i \rangle a_i$ à l'aide de l'exercice 8. En déduire que Π est une application linéaire : $\Pi(v) = Mv$ dans la base canonique pour une certaine matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de rang m .
3. Montrer que $M = AA^T$.

Solution. 1. Les m vecteurs sont linéairement indépendants dans un espace de dimension n . On a donc forcément $m \leq n$.

2. On complète les colonnes de A en une base orthonormale grâce à Gram-Schmidt. On obtient une base orthonormale $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_{n-m}\}$. Par l'exercice 8, on a

$$v = \sum_{i=1}^m \langle v, a_i \rangle a_i + \sum_{i=1}^{n-m} \langle v, b_i \rangle b_i \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

et on a toujours

$$u = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \quad \forall u \in \text{Im}(A).$$

pour certains coefficients α .

Le théorème de Pythagore donne alors $\|u-v\|^2 = \sum_{i=1}^m (\langle v, a_i \rangle - \alpha_i)^2 + \sum_{i=1}^{n-m} \langle v, b_i \rangle^2$. L'unique choix de coefficients α et donc de vecteur u qui minimisent cette norme est bien $\alpha_i = \langle a_i, v \rangle$, ce qui conclut.

3. En manipulant l'expression obtenue précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \Pi(v) &= \sum_{i=1}^m \langle v, a_i \rangle a_i = \sum_{i=1}^m a_i \langle a_i, v \rangle, \\ &= \sum_{i=1}^m a_i a_i^T v, \\ &= \left(\sum_{i=1}^m a_i a_i^T \right) v. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à bien vérifier que $\sum_{i=1}^m a_i a_i^T = AA^T$.

Exercice 10. On considère cette fois-ci une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dont les colonnes sont supposées linéairement indépendantes. On considère à nouveau le cas du produit scalaire standard.

1. Montrer que $\ker(A^T A) = \{0\}$ et donc que $A^T A$ est inversible.

Soit $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im}(A)$ la projection orthogonale sur $\text{Im}(A)$, et soit $A = A^* R$ la décomposition QR de A .

2. Montrer que R est inversible et donc que Π coïncide avec la projection orthogonale sur $\text{Im}(A^*)$. Dédurre de l'exercice précédent que $\Pi = A^*(A^*)^T$.

3. Montrer que $A^T A = R^T R$.

4. Conclure que $\Pi = A(A^T A)^{-1} A^T$.

Solution. 1. Pour un $x \in \ker(A^T A)$, on a $A^T A x = 0$, et donc aussi $x^T A^T A x = 0$. Par suite, $\|Ax\|^2 = 0$ et alors $Ax = 0$. Or les colonnes de A ont été supposées linéairement indépendantes, et donc $x = 0$ est l'unique solution.

2. La matrice R est triangulaire supérieure, et les éléments de sa diagonale sont des normes de vecteurs non nuls. Son déterminant est donc non nul et R est inversible. Il suit en particulier que $\text{Im}(A) = \text{Im}(A^*)$. L'exercice précédent donne directement $\Pi = A^*(A^*)^T$.
3. On a directement $AA^T = R^T(A^*)^T A^* R$. De plus, les colonnes de A^* étant orthonormales, on en déduit immédiatement $(A^*)^T A^* = I$, d'où le résultat.
4. En partant de la relation $\Pi = A^*(A^*)^T$, et comme R est inversible, on trouve

$$\Pi = A^*(A^*)^T = AR^{-1}R^{-T}A^T = A(R^T R)^{-1}A^T = A(A^T A)^{-1}A^T,$$

comme souhaité.

Exercice 11. 1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

2. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} , et soient $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ deux fonctionnelles linéairement indépendantes. Montrer que

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2.$$

Rappel : Si V est un espace vectoriel sur un corps K , son espace dual V^* est l'ensemble des applications linéaires $\phi : V \rightarrow K$, muni de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles.

Solution. 1. Il s'agit de montrer que $V = W + W^\perp$ et que la décomposition est unique.

Soit d'abord une base orthonormale de W : $\{b_1, \dots, b_k\}$, qu'on obtient en appliquant Gram-Schmidt à n'importe quelle base de W . Posons $\Pi(v) = \sum_{i=1}^k \langle b_i, v \rangle b_i$ la projection orthogonale de v sur W . On peut alors décomposer v de la manière suivante.

$$v = \Pi(v) + (v - \Pi(v)).$$

On vérifie bien sûr que $\Pi(v) \in W$ et que $v - \Pi(v) \in W^\perp$, ce qui montre que $V = W + W^\perp$.

L'unicité de la décomposition découle de l'intersection triviale des deux ensembles. En effet, si $v \in W \cap W^\perp$, alors $\|v\|^2 = 0$ et $v = 0$ car le produit scalaire est défini.

2. f et g sont des applications linéaires de \mathbb{R}^n and \mathbb{R} , et sont donc représentables dans la base canonique par des matrices F et G de $\mathbb{R}^{1 \times n}$. Comme les deux fonctionnelles sont indépendantes, F^T et G^T sont indépendants en tant que vecteurs. De plus, $\ker(f) \cap \ker(g) = \ker \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 2 et son noyau doit donc être de dimension $n - 2$.

Exercice 12. (*) Le but de cet exercice est de montrer l'*inégalité d'Hadamard*, c'est-à-dire

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|_2,$$

pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dont les colonnes sont a_1, \dots, a_n .

Soit A' la matrice dont les colonnes sont a_1^*, \dots, a_n^* , les vecteurs *non normalisés* issus de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les colonnes de A . On rappelle la décomposition $A = A'S$, où S est triangulaire supérieure de diagonale 1.

1. Montrer que $\det(S) = 1$ et que $\det(A) = \det(A') = \pm \prod_{i=1}^n \|a_i^*\|_2$.
2. Montrer que $\|a_i^*\| \leq \|a_i\| \forall i = 1, \dots, n$, et conclure.

Supposons de surcroît que les coefficients de A soient tous bornés absolument par $M \in \mathbb{R}_+ : |A_{ij}| \leq M \forall i, j$. Dédurre de l'inégalité d'Hadamard que $|\det(A)| \leq M^n n^{n/2}$.

Solution. *En classe.*