Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 6

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Transformez les matrices réelles suivantes en matrices diagonales dont les éléments sont $0, 1$ et -1. Combien de 0, 1 et -1 sont sur la diagonale ? (Ces quantités sont appelées l'indice de nullité, l'indice de positivité et l'indice de négativité.)

$$(+)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit une forme bilinéaire symétrique $\langle ., . \rangle$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ vérifiants

- $\langle u, u \rangle > 0$, et
- $\langle v, v \rangle < 0$.

Montrer qu'il existe un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\langle w, w \rangle = 0$.

En déduire que le procédé de Gram-Schmidt est parfois impossible si la forme bilinéaire n'est ni définie positive, ni définie négative.

Exercice 3. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$. Trouver une factorisation $A = A^* R$ du corollaire 3.19 de la matrice

$$(+)\ A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}.$$

Exercice 4. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre u et $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$? La distance entre u et V est $dist(u, V) = \min_{v \in V} ||u - v||$, où la norme $|| \cdot ||$ est par raport au produit scalaire ordinaire.

Exercice 5.

1. Soit V un espace vectoriel sur K avec une base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique, et $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $P^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P$ est une matrice diagonale.

   Montrer que les éléments $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, où P_k est la k-ième colonne de P, forment une base orthogonale de V.

2. Soit maintenant V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_3$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base V et $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{Z}_3$ une forme bilinéaire symétrique t.q.

$$A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer une base orthogonale de V.

Exercice 6. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y \rangle = x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Montrer que $\mathbb{Z}_2^2$ ne possède pas de base orthogonale.

Exercice 7. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $||v_1 + \ldots + v_n||^2 = ||v_1||^2 + \ldots + ||v_n||^2$.

b) Montrer que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i, $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Exercice 8. Soit V un espace euclidien de dimension finie avec une base orthonormale $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Montrer que pour tout $v \in V$,
$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

2. Pour $f, g \in V$, montrer l'*identité de Parseval* :
$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f, v_i \rangle \langle v_i, g \rangle.$$

Exercice 9. Soit $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux par rapport au produit scalaire standard.

Posons $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la matrice dont les colonnes sont les $\{a_i\}_{i=1}^m$, et $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}\,(A)$ la projection orthogonale sur l'espace $span(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Par définition, $\Pi(v) = \arg \min_{u\in \mathrm{Im}\,(A)} \|u - v\|$.

1. Montrer que $m \leq n$ à l'aide de l'exercice 7.
2. Montrer que $\Pi(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, a_i \rangle a_i$ à l'aide de l'exercice 8. En déduire que Π est une application linéaire : $\Pi(v) = Mv$ dans la base canonique pour une certaine matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de rang m.
3. Montrer que $M = AA^T$.

Exercice 10. On considère cette fois-ci une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dont les colonnes sont supposées linéairement indépendantes. On considère à nouveau le cas du produit scalaire standard.

1. Montrer que $\ker(A^T A) = \{0\}$ et donc que $A^T A$ est inversible.

Soit $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}\,(A)$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(A)$, et soit $A = A^* R$ la décomposition QR de A.

2. Montrer que R est inversible et donc que Π coïncide avec la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(A^*)$. Déduire de l'exercice précédent que $\Pi = A^*(A^*)^T$.
3. Montrer que $A^T A = R^T R$.
4. Conclure que $\Pi = A(A^T A)^{-1} A^T$.

Exercice 11.

1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

2. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, et soient $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ deux fonctionnelles linéairement indépendantes. Montrer que

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2.$$

Rappel : Si V est un espace vectoriel sur un corps K, son espace dual V^* est l'ensemble des applications linéaires $\phi : V \longrightarrow K$, muni de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles.

Exercice 12. (*) Le but de cet exercice est de montrer l'*inégalité d'Hadamard*, c'est-à-dire

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} ||a_i||_2,$$

pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dont les colonnes sont $a_1, \dots, a_n$.

Soit A' la matrice dont les colonnes sont $a_1^*, \dots, a_n^*$, les vecteurs *non normalisés* issus de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les colonnes de A. On rappelle la décomposition $A = A'S$, où S est triangulaire supérieure de diagonale 1.

1. Montrer que $\det(S) = 1$ et que $\det(A) = \det(A') = \pm \prod_{i=1}^{n} ||a_i^*||_2$.
2. Montrer que $||a_i^*|| \leq ||a_i|| \ \forall i = 1, \dots, n$, et conclure.

Supposons de surcroît que les coefficients de A soient tous bornés absolument par $M \in \mathbb{R}_+ : |A_{ij}| \leq M \ \forall i, j$. Déduire de l'inégalité d'Hadamard que $|\det(A)| \leq M^n n^{n/2}$.