EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 7	17 avril 2023

Les exercices indiqués par une étoile $\star$ sont optionnels.
Si vous le souhaitez, vous pouvez rendre votre solution de l'exercice bonus sur la page Moodle du cours avant le dimanche 30 avril, 18h.

Exercice 1.

1. Soit A un anneau Euclidien. Prouvez que l'algorithme d'Euclide peut être adapté pour calculer les pgdc dans A.
2. Effectuez la division avec reste de $27-23i$ par $8+i$ dans $\mathbb{Z}[i]$, et montrez que ces deux entiers de Gauss sont premiers entre eux.
3. Calculez un pgdc de $11+3i$ et de $1+8i$ dans $\mathbb{Z}[i]$. Ce pgdc est-il unique ?
4. Écrivez les idéaux $(11+3i)$ et de $(1+8i)$ comme un produit d'idéaux premiers de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 2.
Notons $\mathcal{C} := C^0([0,1];\mathbb{R})$ l'anneau des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$ (muni des opérations d'addition et de multiplication de fonctions).

1. Pour $x \in [0,1]$, écrivons $I_x := \{f \in \mathcal{C} \mid f(x) = 0\}$. Montrez que I_x est un idéal maximal.
2. Pour $x \neq y$, montrez que $I_x \cap I_y$ n'est pas un idéal premier.
3. Soit $I \subset \mathcal{C}$ un idéal. Supposons que I n'est contenu dans aucun des I_x. Montrez que $I = \mathcal{C}$.
   Indication : la propriété de Heine–Borel sera utile.
4. Montrez que tout idéal maximal de $\mathcal{C}$ est égal à I_x pour un certain $x \in [0,1]$.

Exercice 3.
Considérons les polynômes $f = x^3 - 2x^2 + x - 2$ et $g = x^4 - 2x^3 + 7x - 14$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

1. Montrez que le pgdc de f et de g dans $\mathbb{Z}[x]$ vaut $x-2$ en écrivant $f = (x-2)f_0$ et $g = (x-2)g_0$ dans $\mathbb{Z}[x]$.
2. Pour un premier p, notons $\bar{f}$ et $\bar{g}$ la réduction de f et g dans $\mathbb{F}_p[x]$. Calculez le pgdc de $\bar{f}$ et de $\bar{g}$ pour chaque p.
   Indication : Remarquez que les étapes de l'algorithme d'Euclide définissables dans $\mathbb{Z}[x]$ sont des étapes de l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{F}_p[x]$ après réduction modulo p.

Exercice 4.

1. Soit $d > 0$ un entier positif. Montrez que $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ est un corps de fractions de $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$.
2. Montrez que $x^3 - 2i$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}[i])[x]$.
   Indication : Utilisez le lemme de Gauss, et gardez en tête qu'un élément de $\mathbb{Q}[i]$ peut s'écrire comme $\frac{a+bi}{n}$ avec $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5.
Soit k un corps.

1. Montrez que le sous-anneau $k[t^2, t^3] \subset k[t]$ n'est pas factoriel.
2. De même, montrez que $k[t^2, t^5]$ et $k[t^3, t^7]$ ne sont pas factoriels.
3. Montrez que $k[x, y]/(x^2 - y^3)$ n'est pas factoriel.
   Indication : Montrez que cet anneau est isomorphe à l'un des anneaux considérés précédemment.

Exercice 6.
Considérons l'anneau de matrices

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} n & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z},\ x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

ainsi que le sous-ensemble

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q} \right\} \subset A.$$

1. Montrez que I est un idéal bilatère, que $A/I \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ et que A/I est Noethérien.
2. Montrez que I est un idéal à droite minimal (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'idéal à droite J tel que $0 \subsetneq J \subsetneq I$).
3. Montrez que A est Noethérien à droite.
   Indication : Etant donnée une chaîne croissante d'idéaux, considérez son image par l'application quotient $A \to A/I$.

Exercice 7. 1. Montrez que $x^2 + y^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x, y]$, mais pas dans $\mathbb{C}[x, y]$.

2. Montrez que $x^3 - (y^7 + 2y^5 + y^3)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x, y]$.

Exercice 8.
Soit (B, σ) un anneau euclidien. Montrez que si $b \in B$ non-nul est tel que $\sigma(b) = 0$, alors $b \in B^\times$.

Exercice bonus 4. Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ pour un $d \geq 1$. Pour un $a + bi\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ on pose la norme $N(a + bi\sqrt{d}) = a^2 + db^2$

1. Soit $x \in A$ non-nul. Montrer que
   $$|A/(x)| = N(x).$$
   (C'est à dire que la cardinalité du quotient est égale à la norme de x.)

   Remarquer que A est un groupe abélien libre de rang 2 et que le quotient $A/(x)$ est égal au quotient de A par l'image de l'application linéaire $\cdot x : A \to A$, et utiliser la forme normale de Smith pour conclure.

Dans le point 2. on considère (B, σ) un anneau euclidien quelconque qui n'est pas un corps.

2. Montrer qu'il existe un $b \in B$ non-nul et non inversible tel que
   $$|B/(b)| \leq |B^\times| + 1.$$
3. Montrer que si $d > 3$, alors A n'est pas Euclidien. (Il ne s'agit pas de montrer que N n'est pas une fonction Euclidienne pour A, mais qu'il n'en existe aucune.)