EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Corrigé – bonus 4	

Exercice bonus 4. Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ pour un $d \geq 1$. Pour un $a + bi\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ on pose la norme $N(a + bi\sqrt{d}) = a^2 + db^2$

1. Soit $x \in A$ non-nul. Montrer que
$$|A/(x)| = N(x).$$
(C'est à dire que la cardinalité du quotient est égale à la norme de x.)

   Remarquer que A est un groupe abélien libre de rang 2 et que le quotient $A/(x)$ est égal au quotient de A par l'image de l'application linéaire $\cdot x : A \to A$, et utiliser la forme normale de Smith pour conclure.

Dans le point 2. on considère (B, σ) un anneau euclidien quelconque qui n'est pas un corps.

2. Montrer qu'il existe un $b \in B$ non-nul et non inversible tel que
$$|B/(b)| \leq |B^\times| + 1.$$

3. Montrer que si $d > 3$, alors A n'est pas Euclidien. (Il ne s'agit pas de montrer que N n'est pas une fonction Euclidienne pour A, mais qu'il n'en existe aucune.)

Solution.

1. Prenons $x = a + bi\sqrt{d} \in A$ non-nul. On prend $(1, i\sqrt{d})$ comme $\mathbb{Z}$-base de A. Dès-lors il suit que la matrice de $\cdot x$ dans cette base est
$$\begin{pmatrix} a & -db \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Le déterminant de cette matrice qui est égal $a^2 + bd^2 = N(x)$. Par la forme normale de Smith, il existe des automorphismes de groupes abéliens $f, g : A \to A$ tel que $f \circ (\cdot x) \circ g$ est sous forme diagonale dans la base $(1, i\sqrt{d})$. Soit donc $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ tel que la matrice soit de forme,
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$
avec donc $|\alpha_1\alpha_2| = N(x)$. Ainsi on peut identifier $A/(x)$ *en tant que groupe abélien* à
$$\mathbb{Z}/\alpha_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\alpha_2\mathbb{Z}$$
ce qui conclut. (Noter que comme le déterminant est non nul α_1 et α_2 sont aussi non-nuls, et donc ces groupes sont finis, de cardinal $|\alpha_1\alpha_2|$.)

   Barème. 10 points pour identifier la norme d'un élément non-nul x avec le déterminant de l'application $\cdot x$. 20 points pour utiliser la forme normale de Smith et pour exprimer $A/(x)$ comme une somme de groupe abélien finis. 10 points pour conclure.

2. Soit $b \in B$ non-nul et non-inversible (B n'est pas un corps) tel que $\sigma(b)$ soit minimal parmi les éléments non-nuls et non-inversibles. Soit $b' \in B$ quelconque. Comme b est non-nul, par division Euclidienne, il existe $q, r \in B$ tel que
$$b' = bq + r,$$
avec $\sigma(r) < \sigma(b)$ ou $r = 0$, en particulier r est nul ou inversible. Dès lors, il suit que
$$|B/(b)| \leq |B^\times| + 1.$$

   Barème. 20 points pour l'idée de prendre b non-nul et non inversible avec $\sigma(b)$ minimal. 10 points pour conclure avec la division euclidienne.

3. Supposons par l'absurde que A soit Euclidien. Soit dès lors un élément $x = a + bi\sqrt{d} \in A$ comme au point précédent. Avec la norme multiplicative $N : A \to \mathbb{N}$, on voit que les seuls inversibles de A sont 1 et -1. Dès lors, une combinaison deux deux points précédents donne,

$$1 < a^2 + b^2 d \leq 3.$$

Comme $d > 3$ on voit que $b = 0$. Comme 2 et 3 ne sont pas des carrés d'entiers, on aboutit à une contradiction.

Barème. 10 points pour identifier les inversibles de A à $\{1, -1\}$. 20 points pour utiliser les deux points précédents et conclure.