Corrigé série 23

On applique la formule

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

dans toutes les questions qui concerne une intégration par parties. Quand on utilise les noms de fonctions $u(x), v(x)$, on fait implicitement allusion à cette formule d'intégration par parties.

Exercice 1 (20 points)

a) En posant $v'(x) = \cos x$ et $u(x) = x$, on trouve que

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

b) En posant $v'(x) = e^x$ et $u(x) = x$, on trouve que

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C.$$

c) En posant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$, on trouve que

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

d) En posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{2x}$, on trouve que

$$\int x^2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx.$$

Dans cette dernière intégrale, on fait le changement de variable $y = 2x$, et on trouve par la première question que

$$\begin{aligned}\int x^2e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int \frac{y}{2}\cdot e^y\,\frac{dy}{2} = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{4}(y-1)e^y\\ &= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + C = \frac{e^{2x}}{4}(2x^2-2x+1) + C.\end{aligned}$$

(On aurait pu intégrer par parties encore une fois.)

e) En posant $u(x) = 3x^2 - 4$ et $v'(x) = \cos x$, on trouve que

$$\int (3x^2 - 4)\cos x\, dx = (3x^2 - 4)\sin x - \int 6x \sin x\, dx.$$

Encore une fois, avec $u(x) = 6x$ et $v'(x) = \sin x$, on trouve

$$\int (3x^2 - 4)\cos x\, dx = (3x^2 - 4)\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C = (3x^2 - 10)\sin x + 6x\cos x + C.$$

f) On applique la formule d'intégration par parties deux fois dans cette intégrale. Posons $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = e^x$. Soit $I = \int e^x \cos x\, dx$. Alors,

$$I = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\, dx.$$

Soient $J = \displaystyle\int e^x \sin x\, dx$, $u(x) = \sin x$, et $v'(x) = e^x$. On trouve que

$$J = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - I.$$

Alors, on a trouvé que

$$I = e^x \cos x - J = e^x \cos x - I + e^x \sin x,$$

ou bien,

$$I = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C.$$

g) Soient $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$. Alors

$$I = \int x^2 \sin x\, dx = x^2(-\cos x) + \underbrace{\int 2x\cos x\, dx}_{=J} + C.$$

Pour calculer J par parties, soient $u_1(x) = 2x$ et $v_1'(x) = \cos x$. Alors,

$$J = 2x\sin x - \int 2\sin x\, dx + C' = 2x\sin x + 2\cos x + C'.$$

En tout, on a trouvé que

$$I = -x^2\cos x + 2\cos x + 2x\sin x + C''.$$

h) Soient $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = \sin x$. Alors,

$$I = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx + C = -\sin x \cos x + \int \, dx - I + C'.$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C''.$$

Exercice 2 (10 points)

a) Soient $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = (x^2 + 1)$. On trouve que

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2+1) \ln x \, dx &= \left[\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3/3 + x}{x} \, dx \\ &= \left[\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3} + 1 \, dx \\ &= \ln 4 + \frac{8}{9}(\ln 8 - 2) = \frac{14}{3} \ln(2) - \frac{16}{9}.\end{aligned}$$

b) Soient $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \ln x$. On a déjà calculé que $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$. Donc, on trouve que

$$\begin{aligned}\int_1^2 (\ln x)^2 \, dx &= [\ln x \, (x \ln x - x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \, (x \ln x - x) \, dx \\ &= (\ln 2)(2 \ln 2 - 2) - \int_1^2 \ln x - 1 \, dx \\ &= (\ln 2)(2 \ln 2 - 2) - 2 \ln 2 + 2 = 2(\ln(2) - 1)^2.\end{aligned}$$

c) Soient $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$. On trouve que

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 3 (10 points)

a) Soit $u = \cos x$. Alors, $du = -\sin x \, dx$, et on calcule que

$$\int_0^{\pi/3} \cos^5 x \sin x \, dx = \int_{1/2}^1 u^5 \, du = \frac{u^6}{6}\Big|_{u=1/2}^1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{63}{64} = \frac{21}{128}.$$

b) Effectue le changement de variables $x = t + 2$. Alors, $dx = dt$. Soit aussi $t = 2 \sin s$ (dans la région $t \in [0, 2]$). On trouve que

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}} dt = \int_0^{\pi/6} \frac{2 \cos s}{\sqrt{4 - 4 \sin^2 s}} \, ds = \int_0^{\pi/6} \, ds = \frac{\pi}{6}.$$

c) Effectue le changement de variables $u = x^3 + 1$. Alors,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln 2.$$

d) Effectue le changement de variables $t = \sin x$. Alors,

$$\int_2^3 \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\sin 2}^{\sin 3} \frac{1}{1+2t}dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2\sin 3}{1+2\sin 2}\right).$$

Exercice 4 (10 points)

a) On a que

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{1+\cos x+\tan^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\cos^2 x}{\cos^2 x+\cos^3 x+\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/3} \frac{-3\sin x\cos^2 x}{1+\cos^3 x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}\ln(1+\cos^3 x)\Big|_{x=0}^{\pi/3} = \frac{1}{3}\ln\frac{16}{9}.$$

b) Comme $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, on a que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 2x\,dx = \left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 2x\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 2x\,dx.$$

On peut calculer $\int_0^{\pi/2}\cos^2 2x\,dx$ de une manière similaire à celle de l'exercice 1d), où on a calculé $\int \sin^2 x\,dx$. On trouve que

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 2x\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}(4x+\sin 4x)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{8}.$$

c) En utilisant l'identité $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, on a que

$$\int_0^{\pi/2} x^2\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2\cos 2x\,dx.$$

La première intégrale du côté droit est facile de calculer ; elle vaut $\frac{\pi^3}{48}$. Pour la deuxième intégrale, on suit la méthode d'intégration par parties (deux fois) comme dans l'exercice 1d) ($\int x^2\sin x\,dx$). On trouve que

$$\int_0^{\pi/2} x^2\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 5 (10 points)

a) **Faux.** Prendre, par exemple, $f(x) = x$, $g(x) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

b) **Vrai.** L'intégrale $\int_a^b f(\cos x)\sin x\,dx$ est obtenue de l'intégrale $-\int_{\cos a}^{\cos b} f(t)\,dt$ par le changement de variables $t = \cos x$.

c) **Vrai.** Soit $y = \cos x$. Alors, $dy = -\sin x$, et on a que

$$\int_0^{2\pi} f(\cos x)\sin x\,dx = -\int_{\cos 0}^{\cos 2\pi} f(y)\,dy = -\int_1^1 f(y)\,dy = 0.$$

d) **Faux.** Par exemple, prendre

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ est paire;} \\ 1 & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Alors, f est de période 2, et $\int_0^4 f(x)\,dx = 2$.

e) **Vrai.** On a que $\int_{-\infty}^b e^x\,dx = e^b$.

f) **Faux.** Comme $\tan x < 0$ pour tout $x \in]\pi/2, \pi[$, il est certain que $\int_{\pi/2}^{\pi} \tan x\,dx$ ne vaut pas zéro.

g) **Vrai.** Voir l'exercice 8.

Exercice 6 (10 points)

a) Une primitive de la fonction $\sqrt{3}x^2$ est $\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3$.

b) Une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-(x/2)^2}}$ est $\arcsin(x/2)$.

c) On a que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{(x^2-4)+4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\int \sqrt{4-x^2}\,dx + \int \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

d) Soient $u(x) = \sqrt{4-x^2}$ et $v'(x) = 1$. Alors, en intégrant par parties et en utilisant la dernière partie, on trouve que

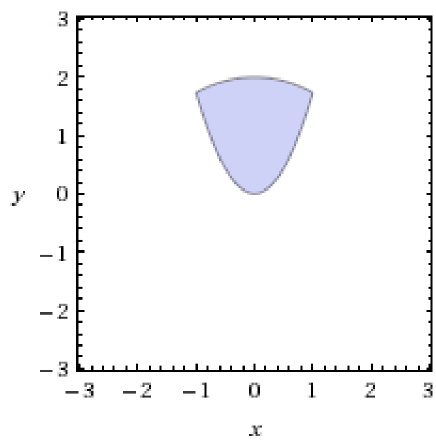
$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-x^2}\,dx &= uv - \int v du = x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + C \\ &= x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2}\,dx + \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + C\end{aligned}$$

Donc,

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2}\right) + C'.$$

e) Notons que $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2}$ en $x=-1$ et $x=1$, et que $\sqrt{4-x^2} > \sqrt{3}x^2$ dans l'intervalle $]-1,1[$. Donc, en utilisant les parties précédentes, on trouve que l'aire cherchée est

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3}.$$



Exercice 7 (10 points)

a) Si $f(x)=0$ pour tout $x\in[a,b]$, alors

$$0 = \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$$

et

$$0 = \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^2 \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^2,$$

et donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

b) On a que

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,dx = \lambda^2\int_a^b f(x)^2\,dx + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g(x)^2\,dx.$$

c) Comme $p(\lambda) := (\lambda f(x) + g(x))^2 \geq 0$ pour tout $x\in[a,b]$, le polynôme p admet au plus une racine et donc $\Delta \leq 0$.

d) Le discriminant Δ de $p(\lambda)$ est

$$\Delta = 4\int_a^b f(x)g(x)\,dx - 4\int_a^b f(x)^2\,dx \int_a^b g(x)^2\,dx.$$

Comme $\Delta \leq 0$ pour tout f, g, on en déduit le résultat.

Exercice 8 (5 points)

En utilisant les formules

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

il est facile de trouver des primitives pour les quatre fonctions. On trouve que

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x$$

et

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x.$$

Donc, il suit que

$$\int \tanh x\,dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx = \ln(\cosh x) + C$$

et

$$\int \coth x\,dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x}\,dx = \ln(\sinh x) + C'.$$