Série 28

Exercice 1. Dans le cours les vecteurs ont été définis dans $\mathbb{R}^n$, mais nous les avons représentés dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire pour $n = 2$ ou $n = 3$). Comment se réalisent les vecteurs dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour $n = 1$) ? Définis cette notion et explique comment on caractérise un vecteur sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'origine $O = (0; 0)$ et les points $A = (1; 1)$ et $B = (2; 1)$.

a) Reporte sur du papier quadrillé les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

b) Construis ensuite les vecteurs $2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{OB}$ et $2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{BA}$, puis la somme de ces deux vecteurs.

c) Indique en notation colonne les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, puis calcule les autres vecteurs que tu as construits ci-dessus.

Exercice 3. Donne des exemples de :

a) flèches différentes qui représentent le même vecteur ;

b) flèches qui représentent des vecteurs différents de même direction et de même longueur ;

c) des vecteurs de même longueur mais de directions différentes ;

d) vecteurs différents de même direction et de même sens.

Exercice 4. *En utilisant la relation de Chasles*, démontre que la somme de vecteurs est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Exercice 5. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si chacun d'eux est un multiple de l'autre.

b) Trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si deux d'entre eux sont colinéaires.

c) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants si l'un d'entre eux est nul.

d) Trois vecteurs de V_3 sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux se trouve dans un même plan que les deux autres.

e) Il existe deux vecteurs linéairement indépendants dans V_1.

f) Il existe trois vecteurs linéairement indépendants dans V_2.

g) Il existe trois vecteurs linéairement indépendants dans V_3.

Exercice 6. Considérons dans V_2 les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

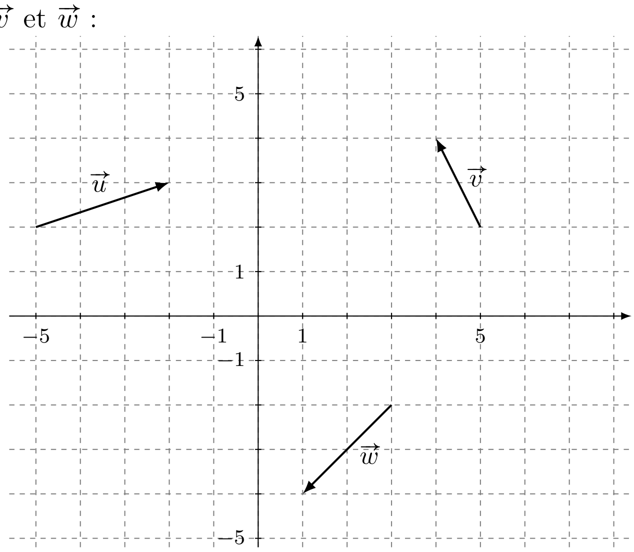
a) Construis $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

b) Calcule cette somme en notation colonne.

c) Décris toutes les flèches équipollentes à $\vec{u}$.

d) Détermine si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

e) Détermine si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

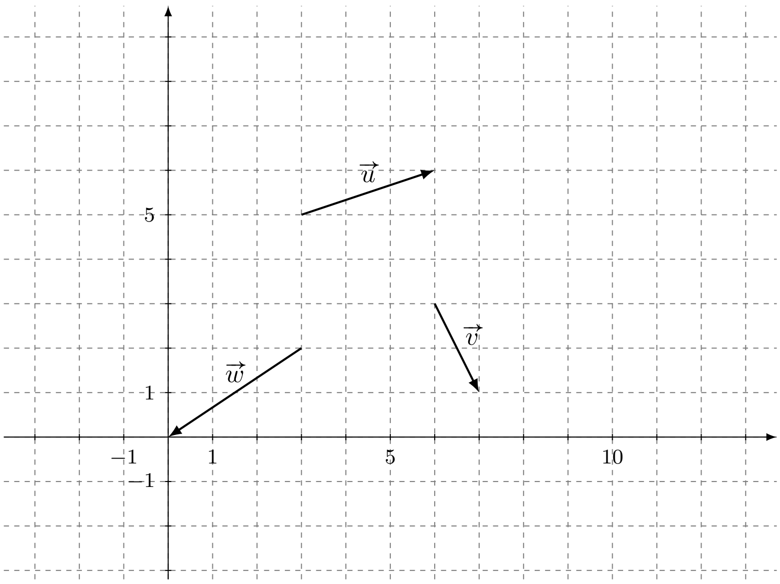


Exercice 7. En utilisant la définition de l'action de $\mathbb{R}$ sur V_2 (et sans utiliser la notation des vecteurs en colonnes), démontre que l'action de $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à la somme de vecteurs de V_2 : $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. Tu pourras t'aider du Théorème de Thalès.

Exercice 8. Reporte dans $\mathbb{R}^2$ les points $A = (4; 2)$, $B = (0; 8)$, $C = (-6; 4)$ (dessine l'axe Ox allant de -6 à 13, et l'axe Oy allant de -3 à 11 avec une unité valant 5 mm) .

Construis le point D tel que $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$. Construis ensuite $\overrightarrow{OA}+1/2\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA}+1/2\cdot\overrightarrow{AB}+1/2\cdot\overrightarrow{BC}$. Détermine le centre du carré $ABCD$.

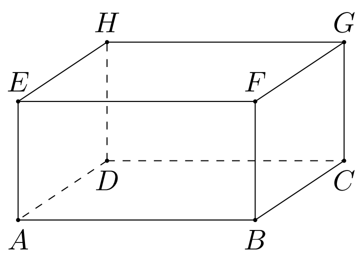
Exercice 9. On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ci-dessous. Construis $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}-\vec{w}$ et $2\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}$; ces trois vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?



Exercice 10. Barycentre d'un triangle équilatéral. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le triangle dont les sommets sont les points $A = (4; 0; 0)$, $B = (0; 4; 0)$ et $C = (0; 0; 4)$. On appelle O l'origine.

a) Dessine une esquisse de ce triangle dans l'espace.
b) Calcule les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
c) Calcule le point milieu du segment $[AB]$ obtenu vectoriellement comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 1/2\cdot\overrightarrow{AB}$.
d) Calcule le vecteur $\overrightarrow{CM}$.
e) Calcule et construis sur ton esquisse le barycentre G du triangle ΔABC. On l'obtient vectoriellement comme $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + 2/3\cdot\overrightarrow{CM}$. Quelles sont les coordonnées de G ?

Exercice 11. On considère dans $\mathbb{R}^3$ un parallélipipède :



Exprime de la manière la plus simple possible les vecteurs $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$ ainsi que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{GC}$.

Exercice 12. L'hexagone régulier. On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ les points $O = (0; 0)$ et $A = (2; 0)$.

a) Donne l'expression des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de longueur 2 qui sont supportés par des droites faisant un angle de $\pi/3$ avec l'axe Ox. On choisira $\vec{u}$ de sorte que ses deux composantes soient positives.

b) Calcule les coordonnées de quatre points B, C, D et E tels que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{u}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{v}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} - \vec{u}$.

c) Représente sur un dessin l'hexagone régulier $OABCDE$ ainsi obtenu.

Exercice 13. On dit que deux flèches du plan sont équivalentes et on note $\overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{CD}$ si elles ont même direction et même longueur.

a) Montre que cela définit une relation d'équivalence sur les flèches.

b) Peut-on définir une somme sur les classes d'équivalence de flèches ainsi obtenues (comme nous l'avons fait pour les classes d'équipollence) ?

Exercice 14. Les polynômes comme espace vectoriel. Considérons $\mathbb{R}[x]$, l'anneau des polynômes réels en une variable x.

a) Pourquoi $\mathbb{R}[x]$ est-il un groupe commutatif pour l'addition de polynômes ?

b) On définit une action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}[x]$ en posant $\lambda \cdot (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n$. Pourquoi $\mathbb{R}[x]$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Explique en particulier pourquoi ce produit est distributif par rapport à l'addition.

c) Montre que les polynômes $1, x, x^2$ sont linéairement indépendants.

d) Montre que les polynômes $1 - x, 1 + x, x$ sont linéairement dépendants.