Exercice 1.

a) Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$. Si $x < 0$, alors

$$1 - x = x \cdot \left(\tfrac{1}{x} - 1\right) \geq x \cdot \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \geq x \cdot \tfrac{1}{x} = 1$$

et par le Théorème des deux gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$. De la même manière, si $x > 0$, alors

$$1 - x \leq x \cdot \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \leq 1$$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$. Comme les limites à gauche et à droite sont les mêmes, on conclut $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$.

b) Le même raisonnement qu'au point précédent s'applique à $x \cdot \lfloor \frac{2}{x} \rfloor$ pour prouver

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \lfloor \tfrac{2}{x} \rfloor = 2$$

On peut donc écrire

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \left(\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor + \lfloor \tfrac{2}{x} \rfloor\right) = \lim_{x\to 0} x \cdot \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor + x \cdot \lfloor \tfrac{2}{x} \rfloor = \lim_{x\to 0} x \cdot \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor + \lim_{x\to 0} x \cdot \lfloor \tfrac{2}{x} \rfloor = 1 + 2 = 3.$$

Exercice 2.

a) Comme dans la démonstration de la convergence des suites rationnelles, on a pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_0\frac{1}{x^m}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ (démontré dans une série précédente), et que la limite d'un produit est le produit des limites (si celles-ci existent), on a pour tout $k \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} k\tfrac{1}{x^d} = k\left(\lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{1}{x}\right)^d = 0$$

De plus, comme la limite d'un quotient est le quotient des limites (si celles-ci existent), et que la limite d'une somme est la somme des limites (si celles-ci existent), on peut conclure

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$

Le résultat énoncé découle en distinguant les trois cas : $n < m$, $n = m$, et $n > m$. Lorsque x tend vers $-\infty$, il faut tenir compte d'un changement possible de signe lorsque $n > m$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot (-1)^{n-m} \cdot \infty & \text{si } n > m, \end{cases}$$

b) Soit $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ une fonction rationnelle donnée comme en **a)**. On rappelle que de l'égalité fondamentale de la division euclidienne de $a(x)$ par $b(x)$, il suit $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$ où $q(x)$ est le quotient, et le degré du reste $r(x)$ est strictement inférieur au le degré de $b(x)$. On avait aussi défini $\delta(x) = \frac{r(x)}{b(x)}$.

- Si f admet une asymptote oblique au "sens des fonctions rationnelles", alors $f(x) = px + o + \delta(x)$ et

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (px + o) = \lim_{x\to\pm\infty} \delta(x) = 0$$

par la partie **a)** de cet exercice. La droite $y = px + o$ est donc bien une asymptote oblique au sens de la définition par les limites.

- Supposons maintenant que f, donnée par $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$, admet une asymptote oblique $y = px + o$ au sens de la définition par les limites. Exploitons la proposition traitant du calcul des asymptotes obliques. Si $p \neq 0$, l'égalité $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = p$ implique par **a)** que le degré du numérateur $a(x)$ est nécessairement égal au degré de $x \cdot b(x)$ (c'est-à-dire $\deg(a) = \deg(b) + 1$), et que $\frac{a_n}{b_m} = p$; si $p = 0$, alors $\deg(a) \leq \deg(b)$. En d'autres termes, $q(x) = px + k$ (avec p éventuellement nul). Comme la limite d'une somme est la somme des limites (si celles-ci existent), l'égalité $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - px) = o$ implique $k = o$, c'est-à-dire $q(x) = px + o$.

Exercice 3. Pour que f admette une asymptote verticale $x = -3$, il faut que $d = 3$. Pour que f admette une asymptote oblique d'équation $y = -2x + 1$, nous pouvons procéder par division euclidienne *ou* avec le calcul de limites :

- Par division euclidienne : il faut que la division de $ax^2 + bx + c$ par $x + 3$ ait un quotient de $q(x) = -2x + 1$. On calcule (par Horner ?) $q(x) = ax + (b - 3a)$ et le reste est $r(x) = c - 3b + 9a$. On veut $-2x + 1 = ax + (b - 3a)$, dont on déduit $a = -2$ et $b + 6 = 1$, soit $b = -5$.
- Par les limites : la pente de -2 de l'asymptote oblique sa calcule avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, donc $a = -2$. De même, l'ordonnée à l'origine de 1 se calcule avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) + 2x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(b+6)x + c}{x + 3} = b + 6$, donc $b = -5$.

Finalement, il reste à trouver c que l'on déduit du fait que le graphe de f passe par le point $(2; -2)$ et donc que $f(2) = -2$; autrement dit $\dfrac{4(-2) + 2(-5) + c}{2 + 3} = -2$, ainsi $c = 8$.

Exercice 4. Pour les asymptotes verticales il faut que $d = 2$ et $e = -1$, ainsi on récrit $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+2)(x-1)}$. De la forme de $f(x)$ et du fait qu'elle admet une asymptote oblique d'équation $3x - 7$, on en déduit immédiatement $a = 3$ et $b = -7$ (en effet, lorsque $x \to \pm\infty$, la partie rationnelle $\dfrac{c}{(x+d)(x+d)}$ de $f(x)$ tendra vers 0). Finalement, on utilise le fait que le graphe de f passe par le point $(-5; 20)$, autrement dit que $f(-5) = 20$, pour obtenir la valeur de $c = 756$.

Exercice 5.

a)
- **Domaine.** Pour que la fonction soit définie, il faut s'assurer que $x^2 + 1 \geq 0$, ce qui est toujours le cas. Donc $D(f) = \mathbb{R}$.
- **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 3 \qquad (\text{car } \sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ si } x < 0)$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 3x) &= \lim_{x\to-\infty} -x + 1 - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2+1)}{-x + 1 + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{-1 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1\end{aligned}$$

Donc $y = 3x + 1$ est asymptote oblique à gauche. De même,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x + 1 - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x + 1 + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

Donc $y = x + 1$ est asymptote oblique à droite.
- **Parité.** La fonction n'est ni paire, ni impaire. Par exemple, $f(-1) = -1 - \sqrt{2}$ n'est ni égal à $f(1) = 3 - \sqrt{2}$ (la fonction n'est donc pas paire), ni à $-f(1) = -3 + \sqrt{2}$ (la fonction n'est pas impaire).

b)
- **Domaine.** Comme $4x^2 + 3 > 0$, il suffit pour que la fonction soit définie que $(4x+1)(x+4) \geq 0$; ce dernier produit décrit une parabole en "$\cup$" dont les zéros sont -4 et $-\frac{1}{4}$. Donc $D(g) =]-\infty; -4] \cup [-\frac{1}{4}; +\infty[$.

- **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{(4x+1)(x+4)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3-(4x+1)(x+4)}{x\left(\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{(4x+1)(x+4)}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(17+\frac{1}{x}\right)}{-x^2\left(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{17}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{17}{4x}=0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{(4x+1)(x+4)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(17+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{17}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)}=\frac{17}{4}$$

Donc $y=\frac{17}{4}$ est asymptote horizontale à gauche. Les limite pour $x\to+\infty$ de $\frac{g(x)}{x}$, puis de $g(x)$, s'obtiennent, au signe près, comme dans les calculs pour $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-17}{4x}=0\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x)=\frac{-17}{4}$$

On obtient que $y=-\frac{17}{4}$ est asymptote horizontale à droite.

- **Parité.** Le domaine de définition de la fonction n'est pas symétrique par rapport à l'origine : g ne peut donc ni être paire, ni être impaire.

c)
- **Domaine.** Les racines impaires (ainsi que les polynômes) sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $D(h)=\mathbb{R}$.
- **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}{x}=1$$

puis on exploite l'identité $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(h(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3-3x+2}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x+2-x^3}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2+2x\sqrt[3]{x^3-3x+2}+x^2}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}}^2+2\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{4x}=0$$

Donc $y=x$ est asymptote oblique à gauche et à droite.

- **Parité.** On a $h(-1)=\sqrt[3]{4}$ qui n'est ni égal à $h(1)=0$, ni à $-h(1)=0$: la fonction n'est ni paire, ni impaire.

d)
- **Domaine.** On a $D(f)=\mathbb{R}$.
- **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{i(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}i(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\cdot\frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=-\frac{1}{2}$$

Donc $y=-\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à gauche. Par contre,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{i(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x+\sqrt{x^2+1}=+\infty$$

et il n'y a pas d'asymptote oblique à droite.

- **Parité.** La fonction ne peut ni être paire, ni impaire parce que l'asymptote oblique à gauche ne possède pas de symétrique à droite.

Exercice 6.

a) La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est en "$\cup$" car $a > 0$.

- Si $\Delta \leq 0$, la parabole est au-dessus ou tangente à Ox, et donc $ax^2 + bx + c \geq 0$. On a alors $D(f) = \mathbb{R}$.
- Si $\Delta > 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ possède deux zéros distincts $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Comme la parabole est en "$\cup$", on a $D(f) =]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$.

b) On calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} = -\sqrt{a}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) + \sqrt{a}x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(b+\frac{c}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a}\right)} = -\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Donc $y = -\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}$ est asymptote horizontale à gauche. Les limite pour $x \to +\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$ et de $f(x)$ se calculent de même, à signe près ; on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{a} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \sqrt{a}x) = \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Donc $y = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ est asymptote horizontale à droite. Comme

$$\left|\sqrt{a}x + \tfrac{b}{2\sqrt{a}}\right| = \begin{cases} -\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}} & \text{si } x < \frac{-b}{2a}, \text{ et} \\ \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} & \text{si } x \geq \frac{-b}{2a} \end{cases}$$

les asymptotes de f sont bien confondues à gauche et à droite avec la courbe $y = \left|\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right|$.

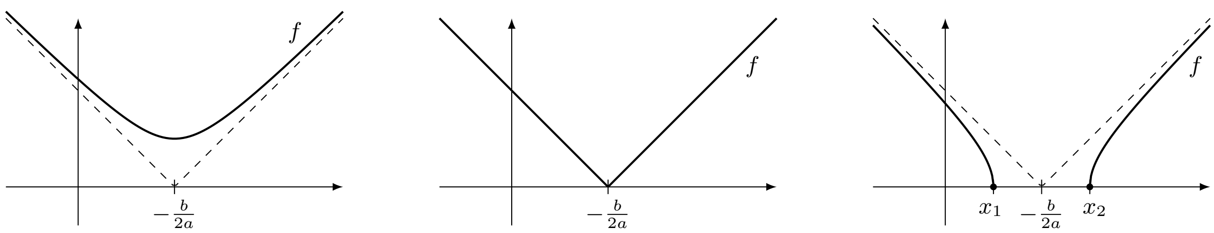
c) Commençons par trouver les éventuels points d'intersections du graphe de g avec le graphe de f : l'équation $g(x) = f(x)$ s'écrit $\left|\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right| = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Au risque de rajouter des solutions, élevons chaque côté de l'égalité au carré : on obtient

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = ax^2 + bx + c \qquad \text{qui est équivalent à} \qquad b^2 - 4ac = 0$$

En d'autres termes, les deux courbes ne s'intersectent que lorsque $\Delta = 0$ (et on se convainc qu'il n'y a pas de "solution rajoutée"). Traitons les différents cas, en exploitant que le seul zéro de g est $x = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, le sommet de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ est en $S = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ est au-dessus du zéro de g. En prenant la racine de $ax^2 + bx + c$, on ne change pas la décroissance ou la croissance de la parabole. On obtient une branche d'hyperbole (voir le cours de 3e année sur les coniques).
- Si $\Delta = 0$, on a
$$f(x) = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \left|\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right| = \left|\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right|,$$
le graphe de f est confondu avec celui de g.
- Si $\Delta > 0$, le zéro de g est au milieu de "l'intervalle manquant" $]x_1; x_2[$ à $D(f)$. En x_1 et x_2, les zéros de f, le graphe de f sera donc en-dessous du graphe de g. On obtient dans ce cas deux demi-branches d'hyperbole (voir encore une fois le cours de 3e année sur les coniques).

Voici des esquisses du graphe de f (avec $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$) dans les 3 cas traités ci-dessus.



Cas $\Delta < 0$ Cas $\Delta = 0$ Cas $\Delta > 0$

Exercice 7.

a) • Dans la démonstration de $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ du cours, nous avons vu (en comparant des aires de triangles) que si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, alors en particulier, $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t}$. De même, dans le cercle trigonométrique, on observe que la longueur d'arc $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ est plus grande que la longueur de sa projection $\sin(t)$ sur l'axe vertical : $\sin(t) \leq t$, d'où l'on tire $\frac{\sin(t)}{t} \leq 1$ en divisant par $t > 0$.

• Des considérations similaires dans le cercle trigonométrique, en prenant garde au signe de $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ et au sens des inégalités, donnent aussi $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t}$. Dans ce cas, $\sin(t) \geq t$ (car $t < 0$) donne $\frac{\sin(t)}{t} \leq 1$ après division par t.

Dans les deux cas, on a bien $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$.

b) • Si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, des inégalités de **a)** on déduit $\frac{1}{t} \cdot (\cos(t) - 1) \geq \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \geq \frac{1}{t} \cdot (1 - 1) = 0$.

• Si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient $\frac{1}{t} \cdot (\cos(t) - 1) \leq \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \leq \frac{1}{t} \cdot (1 - 1) = 0$.

c) Dans les deux cas précédents, on amplifie l'expression de gauche par $\cos(t) + 1$ pour pouvoir conclure.

• En effet, si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, alors

$$\frac{1}{t} \cdot \left(\frac{-\sin^2(t)}{\cos(t) + 1}\right) \geq \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \geq 0$$

Comme $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{-\sin^2(t)}{1+\cos(t)}\right) = \lim\limits_{t\to 0^-} -\frac{\sin(t)}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}\right) = -1 \cdot \frac{0}{1} = 0$, on obtient $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) = 0$ par les 2 gendarmes.

• Si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, les inégalités

$$\frac{1}{t} \cdot \left(\frac{-\sin^2(t)}{\cos(t) + 1}\right) \leq \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \leq 0$$

permettent de conclure comme avant $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) = 0$.

On a finalement montré $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) = 0$.

Exercice 8.

a) • **Domaine.** Pour que la fonction soit définie, il faut que le dénominateur soit non nul : $x \neq 0$, donc $D(a) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• **Limites.** En $x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} x + \dfrac{\sin(x)}{x} = 0 + 1 = 1$. La fonction possède donc un "trou" en $(0; 1)$.

• **Asymptotes.** Par le calcul précédent, il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 0$. Pour l'asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x^2} = 1 + 0 = 1$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} (a(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

par le Théorème des deux gendarmes pour les fonctions. Donc $y = x$ est l'asymptote oblique (à gauche et à droite).

• **Parité.** Comme l'asymptote oblique n'est pas symétrique par rapport à Oy, la fonction n'est pas paire. De plus, $a\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$ et $-a\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$, la fonction n'est pas impaire non plus.
Alternativement, la somme d'une fonction impaire (non nulle) et d'une fonction paire (non nulle) — car quotient de deux fonctions impaires — n'est ni paire ni impaire.

b) • **Domaine.** La fonction est définie partout, donc $D(b) = \mathbb{R}$.

• **Limites.** Il n'y a pas de valeur interdite, donc pas de trou.

• **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour l'asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{b(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x} = 1 + 0 = 1$$

par le Théorème des deux gendarmes. Par contre, les limites vers $-\infty$ ou $+\infty$ de $b(x) - x = \sin(x)$ n'existent pas (par exemple, les suites données par $x_n = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ et $y_n = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$ tendent toutes deux vers $+\infty$, mais leurs images par b tendent respectivement vers 1 et -1).
La fonction ne possède donc pas d'asymptote oblique (ni à gauche, ni à droite).

- **Parité.** La somme de deux fonctions impaire est impaire (on a bien $b(-x) = -b(x)$).

c)
- **Domaine.** Pour éviter une "division par 0", $D(c) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- **Limites.** Comme $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en $x = 0$, on a $\lim_{x\to 0} 10x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ par le Théorème des deux gendarmes pour les fonctions. La fonction possède donc un "trou" en $(0;0)$.
- **Asymptotes.** Pas d'asymptote verticale pour cette fonction par le calcul précédent. Pour l'asymptote oblique, on calcule
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0$$
(au besoin, on peut se convaincre de ce résultat par le Théorème des deux gendarmes, puisque pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$, on a $t \leq \sin(t) \leq -t$, c'est-à-dire pour $x \in \left]-\infty;-\frac{2}{\pi}\right[$, on a $\frac{1}{x} \leq \sin(t) \leq -\frac{1}{x}$, et donc $\lim_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$). De plus, par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on obtient
$$\lim_{x\to-\infty} c(x) = \lim_{t\to 0^-} 10 \cdot \frac{\sin(t)}{t} = 10$$
La droite $y = 10$ est donc asymptote horizontale à gauche pour c. Les calculs pour $x \to +\infty$ sont similaires, et on trouve que $y = 10$ est aussi asymptote horizontale à droite.
- **Parité.** Comme $c(-x) = c(x)$, la fonction est paire.

d)
- **Domaine.** Pour éviter une "division par 0", $D(d) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- **Limites.** En raisonnant comme en **c)**, on obtient $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, et cette fonction possède aussi un "trou" en $(0;0)$.
- **Asymptotes.** Pas d'asymptote verticale pour cette fonction par le calcul précédent. Pour l'asymptote oblique,
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{d(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$
par le même changement de variable $t = \frac{1}{x}$ qu'en **c)**. De même,
$$\lim_{x\to\pm\infty} d(x) - x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) = 0$$
par l'exercice précédent, et $y = x$ est asymptote oblique pour d.
- **Parité.** Comme $d(-x) = -d(x)$, la fonction est impaire.