EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 8	24 avril 2023

Les exercices indiqués par une étoile $\star$ sont optionnels.

Exercice 1 (Échauffement).
Soit $\phi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que:

(a) Si $a \in A$ inversible, alors $\phi(a)$ est inversible.

(b) Si $a, b \in A$ tel que $a \sim b$, alors $\phi(a) \sim \phi(b)$.

(c) Si $a \in A$ irréductible, déterminer si $\phi(a)$ est irréductible ou non.

Exercice 2. (a) Soit A un anneau intègre. Si $a_1, \ldots, a_n \in A$ sont des racines distinctes de $f(x) \in A[x]$, montrer que $\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$ divise $f(x)$.

(b) Soient p et q deux nombres premiers distincts dans $\mathbb{Z}$. Montrer que le polynôme $t^2 - t$ de $(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z})[t]$ possède quatre racines distinctes $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, mais que $(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - a_4)$ ne divise pas $t^2 - t$.

(c) Soient $f, g \in \mathbb{Z}[t]$ des polynômes primitifs. Montrer que si f divise g dans $\mathbb{Q}[t]$, alors f divise g dans $\mathbb{Z}[t]$.

(d) Décomposer les polynômes $t^4 + 1$ et $t^8 - 1$ en facteurs irréductibles dans les anneaux $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{Z}[t]$, $\mathbb{F}_2[t]$ et $\mathbb{F}_{11}[t0]$.

Exercice 3 (Polynômes irréductibles I). (a) Montrer que $\frac{2}{9}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + x^3 + \frac{1}{3}$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Montrer que $x^4 + [2]_5$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_5[x]$ et conclure que $x^4 + 15x^3 + 7$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Montrer que $x^2 + y^2 + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[x, y]$.

(d) Montrer que $x^2 + y^2 + [1]_2$ n'est pas un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_2[x, y]$.

(e) Montrer que $y^4 + x^3 + x^2y^2 + xy + 2x^2 - x + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x, y]$.

(f) Montrer que $4x^3 + 120x^2 + 8x - 12$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(g) Montrer que $t^6 + t^3 + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[t]$.

(h) Montrer que $y^4 + xy^3 + xy^2 + x^2y + 3x^2 - 2x$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x, y]$.

Exercice 4 (Polynômes irréductibles II).
Soit $f(t) = t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 7t - 4$ dans $\mathbb{Z}[t]$.

(a) Montrer que $\pi_2(f)$, la réduction modulo 2, n'est pas irréductible.

(b) Montrer que $\pi_3(f)$, la réduction modulo 3, n'est pas irréductible.

(c) Utiliser les décompositions des parties précédentes pour conclure néanmoins que f est irréductible.