

---

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2023

---

**Série 7 – Corrigé**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (\*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (\*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1.** Démontrer le lemme 4.2.

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice hermitienne et soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Montrer que  $\lambda$  est réelle.

**Solution.** *On a que*

$$\begin{aligned}
 \lambda x^T \bar{x} &= (\lambda x)^T \bar{x} \\
 &= (Ax)^T \bar{x} \\
 &= x^T A^T \bar{x} \\
 &= x^T \overline{A^T x} \\
 &= x^T \overline{A^* x} \\
 &= x^T \overline{Ax} \\
 &= x^T \overline{\lambda x} \\
 &= \bar{\lambda} x^T \bar{x}
 \end{aligned}$$

Comme  $x^T \bar{x} \neq 0$ , on a  $\lambda = \bar{\lambda}$ , donc  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 2.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitienne et  $u, v \in \mathbb{C}^n$  deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Montrer que  $u$  et  $v$  sont orthogonaux par rapport au produit hermitien standard.

**Solution.** *Soient  $u, v$  des vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs  $\lambda \neq \mu$ . Alors*

$$\begin{aligned}
 \lambda u^T \bar{v} &= (\lambda u)^T \bar{v} \\
 &= (Au)^T \bar{v} \\
 &= u^T \overline{A \bar{v}} \\
 &= u^T \overline{Av} \\
 &= u^T \overline{\mu v} \\
 &= \bar{\mu} u^T \bar{v}.
 \end{aligned}$$

Or comme  $\mu$  est réel par l'exercice précédent, l'inégalité  $\lambda \neq \bar{\mu}$  permet de conclure.

**Exercice 3.** Contraposée du théorème spectral.

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire standard sur  $\mathbb{C}$  ( $\langle x, y \rangle = x^T \bar{y}$ ), et soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice diagonalisable telle que :

- i) chaque valeur propre est réelle, et
- ii) pour tout couple  $(u, v)$  de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes,  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Montrer que  $A$  se diagonalise dans une base orthonormale. En déduire que  $A$  est hermitienne.

**Solution.** Nous savons que  $A$  se diagonalise, et que les espaces propres différents sont deux à deux orthogonaux grâce à la seconde hypothèse.

Il s'agit donc uniquement de trouver une base orthonormale de chaque espace propre afin que leur concaténation donne une base orthonormale de  $\mathbb{C}^n$  de vecteurs propres de  $A$ . Pour cela, on applique simplement Gram-Schmidt sur des bases quelconques de chaque espace propre.

Ceci nous donne

$$A = PDP^{-1}$$

avec  $P$  la matrice de vecteurs propres choisis, et  $D$  la matrice diagonale des valeurs propres correspondantes. Par orthonormalité dans  $\mathbb{C}$ , on a  $P^T \bar{P} = I$ , et donc

$$A = PDP^*$$

Comme les valeurs propres ont été supposées réelles,  $A$  est hermitienne car

$$A^* = (PDP^*)^* = PD^*P^* = A.$$

**Exercice 4.** Soit  $A$  la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 - i & -3i \\ 2 + i & 0 & 1 - i \\ 3i & 1 + i & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver une matrice unitaire  $P \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  telle que  $P^* \cdot A \cdot P$  est une matrice diagonale.

**Solution.** Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$p(x) = \det(A - xI) = (x + 1)(x - 6)(x + 2).$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc  $-1, 6$  et  $-2$ . On trouve les bases des espaces propres

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 : & b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + 2i \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 6 : & b_2 = \begin{bmatrix} 1 - 21i \\ 6 - 9i \\ 13 \end{bmatrix} \\ \lambda_3 = -2 : & b_3 = \begin{bmatrix} 1 + 3i \\ -2 - i \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Les vecteurs  $b_1, b_2, b_3$  sont deux-à-deux orthogonaux, parce que les valeurs propres sont distinctes. Il reste à les normaliser et on obtient

$$p_1 = b_1 / \|b_1\| = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + 2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = b_2 / \|b_2\| = \frac{1}{\sqrt{728}} \begin{bmatrix} 1 - 21i \\ 6 - 9i \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = b_3 / \|b_3\| = \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{bmatrix} 1 + 3i \\ -2 - i \\ 5 \end{bmatrix}$$

On obtient la matrice unitaire

$$P = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]$$

et on peut vérifier que

$$P^* \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.** Soit  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (resp.  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ) tel que les colonnes de  $U$  forment une base orthonormale par rapport au produit scalaire standard (resp. par rapport au produit hermitien standard).

1. Montrer que  $U$  est une matrice orthogonale (resp. unitaire).
2. Montrer que les lignes de  $U$  forment une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ).

**Solution.** Le cas réel est un cas particulier du cas complexe. On prouve donc uniquement le cas complexe.

Soit donc  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $U = (u_1 \dots u_n)$ ,  $u_i \in \mathbb{C}^n \forall i$  tels que les colonnes  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $U$  forment une base orthonormale par rapport au produit hermitien standard, c'est-à-dire

$$u_i^T \overline{u_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors que

$$U^* U = \begin{pmatrix} \overline{u_1^T} \\ \vdots \\ \overline{u_n^T} \end{pmatrix} \cdot (u_1 \dots u_n) = I_n$$

Ceci implique que  $U$  est inversible d'inverse  $U^{-1} = U^*$ , i.e.  $U$  est unitaire. En particulier, si on écrit

$$U = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

où  $v_i^T$  est la  $i$ -ème ligne de  $U$ , on a que

$$I_n = UU^* = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot (\overline{v_1} \ \dots \ \overline{v_n})$$

ce qui est équivalent à

$$v_i^T \overline{v_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des lignes  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $U$  forme donc un ensemble orthonormal. En particulier, c'est un ensemble libre et donc une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$  (et si  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , c'est aussi une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ ).

**Exercice 6.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice hermitienne et inversible. Montrer que si toutes les valeurs propres de  $A$  sont positives, alors toutes les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont aussi positives.

**Solution.** Supposons que les valeurs propres de  $A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sont positives. On va montrer que  $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$  sont les valeurs propres de  $A^{-1}$ :

Comme  $A$  est une matrice hermitienne, il existe une matrice unitaire  $P$  telle que  $P^*AP = D$ , où  $D$  est une matrice diagonale.

Comme  $\det(P^*)\det(P) = 1$ ,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(P^*)\det(A - \lambda I)\det(P) \\ &= \det(P^*(A - \lambda I)P) \\ &= \det(P^*AP - \lambda P^*P) \\ &= \det(D - \lambda I), \end{aligned}$$

donc  $D$  a les nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sur la diagonale. Alors

$$I = P^*P = P^*AA^{-1}P = P^*APP^*A^{-1}P = D(P^*A^{-1}P).$$

Ça signifie que  $P^*A^{-1}P = D^{-1}$ , et les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont exactement les valeurs propres de  $D^{-1}$  à savoir  $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ .

**Exercice 7.** Soit  $K$  un corps et  $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times m}$  avec  $m \leq n$ . On pose  $p_M$  le polynôme caractéristique d'une matrice  $M$ .

1. Montrer que  $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ .
2. En déduire que  $p_{BA}(\lambda) = (-1)^{n-m} \lambda^{n-m} p_{AB}(\lambda)$  et donc que les valeurs propres de  $BA$  sont exactement les valeurs propres de  $AB$  (avec multiplicités égales) avec  $n - m$  zéros en plus.

3. En comparant les coefficients de  $\lambda^{n-m}$ , et à l'aide du mini-examen 1, en déduire la formule de Cauchy-Binet

$$\det(AB) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \det(A_{[m],I}) \det(B_{I,[m]}).$$

**Solution.** 2. D'après le résultat  $p_{PMP^{-1}} = p_M$ , et comme

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C),$$

on déduit de la question 1 la relation

$$p_{AB}(t)t^n = t^m p_{BA}(t).$$

3. Le coefficient en  $\lambda^{n-m}$  de  $\lambda^{n-m} p_{AB}(\lambda)$  est le coefficient constant de  $p_{AB}$ , c'est-à-dire  $\det(AB)$ . Le mini-examen 1 conclut en remarquant que

$$(BA)_I = B_{I,[m]} A_{[m],I}.$$

**Exercice 8.** Soit  $K$  un corps,  $V$  un  $K$ -espace vectoriel, et soit une application linéaire  $f : V \rightarrow V$  supposée diagonalisable.

**Définition :** un sous-espace vectoriel  $W \subseteq V$  est dit *invariant* par  $f$  si  $f(W) \subseteq W$ .

Soit  $W$  un sous-espace de  $V$  invariant par  $f$ . Montrer que la restriction de  $f$  à  $W$ ,  $f|_W : W \rightarrow W$ , est également diagonalisable. <sup>1</sup>

**Solution.** Il est d'abord clair que  $\bigoplus_{\lambda} (E_{\lambda} \cap W)$  est bien une somme directe car  $\bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}$  en est une.

De plus, l'inclusion  $\bigoplus_{\lambda} (E_{\lambda} \cap W) \subseteq W$  est également immédiate. Montrons donc l'inclusion inverse.

Soit  $w \in W$ . Décomposons  $w$  comme somme de vecteur propres

$$w = \sum_{\lambda} v_{\lambda},$$

où  $v_{\lambda} \in E_{\lambda}$ . Nous cherchons à démontrer que  $v_{\lambda} \in W$  pour chaque  $\lambda$ .

Idexons les valeurs propres (toutes distinctes)  $\lambda_i$  avec  $i = 1, \dots, k$ . Remarquons que l'expression

$$f(w) - \lambda_k w = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) v_i \in W$$

car  $W$  est invariant par  $f$ .

---

<sup>1</sup>Remarquez que  $V = \bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}$ , où les  $E_{\lambda}$  sont les différents espaces propres. Montrez que  $W = \bigoplus_{\lambda} (E_{\lambda} \cap W)$ .

La somme comprend désormais un vecteur de moins qu'avant, et les coefficients devant ceux-ci sont tous non nuls.

On peut désormais réappliquer  $f - \lambda_{k-1}id$  ( $id$  est l'application identité) pour faire disparaître  $v_{k-1}$ . En fait, en répétant le processus,

$$\left( \prod_{j=2}^k (f - \lambda_j id) \right) (w) = \prod_{j=2}^k (\lambda_1 - \lambda_j) v_1 \in W.$$

Il suit que  $v_1 \in W$ . Plus généralement, on peut considérer l'application

$$\left( \prod_{j \neq i} \frac{(f - \lambda_j id)}{\lambda_i - \lambda_j} \right) (w) = v_i,$$

qui implique que  $v_i \in W \forall i$ .

Une démonstration par récurrence sur le nombre de vecteurs de la décomposition de  $w$  peut également être faite.

**Exercice 9.** Soient  $K$  un corps,  $V$  un  $K$ -espace vectoriel, et  $f, g$  deux endomorphismes sur  $V$ .

**Définition :** deux applications linéaires  $f, g$  sont *simultanément diagonalisables* s'il existe une base commune de vecteurs propres de  $f$  et  $g$ .

Montrer que si  $f$  et  $g$  sont simultanément diagonalisables, alors  $f$  et  $g$  commutent.

**Solution.** Dans la base commune  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  de vecteurs propres de  $f$  et  $g$ , associés aux valeurs  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  respectivement pour chaque  $i$ , on a simplement

$$\begin{aligned} (f \circ g)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i b_i\right), \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \lambda_i b_i, \\ &= (g \circ f)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right). \end{aligned}$$

**Exercice 10. (\*)**

Montrer la contraposée de l'exercice 9 : si  $f$  et  $g$  sont diagonalisables et commutent, alors  $f$  et  $g$  sont simultanément diagonalisables.

**Solution.** *En classe.*