

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 7 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Démontrer le lemme 4.2.

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne et soit λ une valeur propre de A . Montrer que λ est réelle.

Solution. *On a que*

$$\begin{aligned} \lambda x^T \bar{x} &= (\lambda x)^T \bar{x} \\ &= (Ax)^T \bar{x} \\ &= x^T A^T \bar{x} \\ &= x^T \overline{A^T x} \\ &= x^T \overline{A^* x} \\ &= x^T \overline{Ax} \\ &= x^T \overline{\lambda x} \\ &= \bar{\lambda} x^T \bar{x} \end{aligned}$$

Comme $x^T \bar{x} \neq 0$, on a $\lambda = \bar{\lambda}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitienne et $u, v \in \mathbb{C}^n$ deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Montrer que u et v sont orthogonaux par rapport au produit hermitien standard.

Solution. *Soient u, v des vecteurs propres de A associés aux valeurs $\lambda \neq \mu$. Alors*

$$\begin{aligned} \lambda u^T \bar{v} &= (\lambda u)^T \bar{v} \\ &= (Au)^T \bar{v} \\ &= u^T \bar{A} \bar{v} \\ &= u^T \overline{Av} \\ &= u^T \overline{\mu v} \\ &= \bar{\mu} u^T \bar{v}. \end{aligned}$$

Or comme μ est réel par l'exercice précédent, l'inégalité $\lambda \neq \bar{\mu}$ permet de conclure.

Exercice 3. Contraposée du théorème spectral.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard sur \mathbb{C} ($\langle x, y \rangle = x^T \bar{y}$), et soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice diagonalisable telle que :

- i) chaque valeur propre est réelle, et
- ii) pour tout couple (u, v) de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, $\langle u, v \rangle = 0$.

Montrer que A se diagonalise dans une base orthonormale. En déduire que A est hermitienne.

Solution. Nous savons que A se diagonalise, et que les espaces propres différents sont deux à deux orthogonaux grâce à la seconde hypothèse.

Il s'agit donc uniquement de trouver une base orthonormale de chaque espace propre afin que leur concaténation donne une base orthonormale de \mathbb{C}^n de vecteurs propres de A . Pour cela, on applique simplement Gram-Schmidt sur des bases quelconques de chaque espace propre.

Ceci nous donne

$$A = PDP^{-1}$$

avec P la matrice de vecteurs propres choisis, et D la matrice diagonale des valeurs propres correspondantes. Par orthonormalité dans \mathbb{C} , on a $P^T \bar{P} = I$, et donc

$$A = PDP^*.$$

Comme les valeurs propres ont été supposées réelles, A est hermitienne car

$$A^* = (PDP^*)^* = PD^*P^* = A.$$

Exercice 4. Soit A la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 - i & -3i \\ 2 + i & 0 & 1 - i \\ 3i & 1 + i & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver une matrice unitaire $P \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ telle que $P^* \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale.

Solution. Le polynôme caractéristique de A est

$$p(x) = \det(A - xI) = (x + 1)(x - 6)(x + 2).$$

Les valeurs propres de A sont donc $-1, 6$ et -2 . On trouve les bases des espaces propres

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 : & b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + 2i \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 6 : & b_2 = \begin{bmatrix} 1 - 21i \\ 6 - 9i \\ 13 \end{bmatrix} \\ \lambda_3 = -2 : & b_3 = \begin{bmatrix} 1 + 3i \\ -2 - i \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Les vecteurs b_1, b_2, b_3 sont deux-à-deux orthogonaux, parce que les valeurs propres sont distinctes. Il reste à les normaliser et on obtient

$$p_1 = b_1 / \|b_1\| = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + 2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = b_2 / \|b_2\| = \frac{1}{\sqrt{728}} \begin{bmatrix} 1 - 21i \\ 6 - 9i \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = b_3 / \|b_3\| = \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{bmatrix} 1 + 3i \\ -2 - i \\ 5 \end{bmatrix}$$

On obtient la matrice unitaire

$$P = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]$$

et on peut vérifier que

$$P^* \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (resp. $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$) tel que les colonnes de U forment une base orthonormale par rapport au produit scalaire standard (resp. par rapport au produit hermitien standard).

1. Montrer que U est une matrice orthogonale (resp. unitaire).
2. Montrer que les lignes de U forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n).

Solution. Le cas réel est un cas particulier du cas complexe. On prouve donc uniquement le cas complexe.

Soit donc $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $U = (u_1 \dots u_n)$, $u_i \in \mathbb{C}^n \forall i$ tels que les colonnes $\{u_1, \dots, u_n\}$ de U forment une base orthonormale par rapport au produit hermitien standard, c'est-à-dire

$$u_i^T \overline{u_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors que

$$U^* U = \begin{pmatrix} \overline{u_1^T} \\ \vdots \\ \overline{u_n^T} \end{pmatrix} \cdot (u_1 \dots u_n) = I_n$$

Ceci implique que U est inversible d'inverse $U^{-1} = U^*$, i.e. U est unitaire. En particulier, si on écrit

$$U = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

où v_i^T est la i -ème ligne de U , on a que

$$I_n = UU^* = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot (\overline{v_1} \ \dots \ \overline{v_n})$$

ce qui est équivalent à

$$v_i^T \overline{v_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des lignes $\{v_1, \dots, v_n\}$ de U forme donc un ensemble orthonormal. En particulier, c'est un ensemble libre et donc une base du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^n (et si $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, c'est aussi une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n).

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne et inversible. Montrer que si toutes les valeurs propres de A sont positives, alors toutes les valeurs propres de A^{-1} sont aussi positives.

Solution. Supposons que les valeurs propres de A , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sont positives. On va montrer que $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ sont les valeurs propres de A^{-1} :

Comme A est une matrice hermitienne, il existe une matrice unitaire P telle que $P^*AP = D$, où D est une matrice diagonale.

Comme $\det(P^*)\det(P) = 1$,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(P^*)\det(A - \lambda I)\det(P) \\ &= \det(P^*(A - \lambda I)P) \\ &= \det(P^*AP - \lambda P^*P) \\ &= \det(D - \lambda I), \end{aligned}$$

donc D a les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale. Alors

$$I = P^*P = P^*AA^{-1}P = P^*APP^*A^{-1}P = D(P^*A^{-1}P).$$

Ça signifie que $P^*A^{-1}P = D^{-1}$, et les valeurs propres de A^{-1} sont exactement les valeurs propres de D^{-1} à savoir $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$.

Exercice 7. Soit K un corps et $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times m}$ avec $m \leq n$. On pose p_M le polynôme caractéristique d'une matrice M .

1. Montrer que $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$.

2. En déduire que $p_{BA}(\lambda) = (-1)^{n-m} \lambda^{n-m} p_{AB}(\lambda)$ et donc que les valeurs propres de BA sont exactement les valeurs propres de AB (avec multiplicités égales) avec $n - m$ zéros en plus.

3. En comparant les coefficients de λ^{n-m} , et à l'aide du mini-examen 1, en déduire la formule de Cauchy-Binet

$$\det(AB) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \det(A_{[m],I}) \det(B_{I,[m]}).$$

Solution. 2. D'après le résultat $p_{PMP^{-1}} = p_M$, et comme

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C),$$

on déduit de la question 1 la relation

$$p_{AB}(t)t^n = t^m p_{BA}(t).$$

3. Le coefficient en λ^{n-m} de $\lambda^{n-m} p_{AB}(\lambda)$ est le coefficient constant de p_{AB} , c'est-à-dire $\det(AB)$. Le mini-examen 1 conclut en remarquant que

$$(BA)_I = B_{I,[m]} A_{[m],I}.$$

Exercice 8. Soit K un corps, V un K -espace vectoriel, et soit une application linéaire $f : V \rightarrow V$ supposée diagonalisable.

Définition : un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ est dit *invariant* par f si $f(W) \subseteq W$.

Soit W un sous-espace de V invariant par f . Montrer que la restriction de f à W , $f|_W : W \rightarrow W$, est également diagonalisable. ¹

Solution. Il est d'abord clair que $\bigoplus_{\lambda} (E_{\lambda} \cap W)$ est bien une somme directe car $\bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}$ en est une.

De plus, l'inclusion $\bigoplus_{\lambda} (E_{\lambda} \cap W) \subseteq W$ est également immédiate. Montrons donc l'inclusion inverse.

Soit $w \in W$. Décomposons w comme somme de vecteur propres

$$w = \sum_{\lambda} v_{\lambda},$$

où $v_{\lambda} \in E_{\lambda}$. Nous cherchons à démontrer que $v_{\lambda} \in W$ pour chaque λ .

Idexons les valeurs propres (toutes distinctes) λ_i avec $i = 1, \dots, k$. Remarquons que l'expression

$$f(w) - \lambda_k w = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) v_i \in W$$

car W est invariant par f .

¹Remarquez que $V = \bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}$, où les E_{λ} sont les différents espaces propres. Montrez que $W = \bigoplus_{\lambda} (E_{\lambda} \cap W)$.

La somme comprend désormais un vecteur de moins qu'avant, et les coefficients devant ceux-ci sont tous non nuls.

On peut désormais réappliquer $f - \lambda_{k-1}id$ (id est l'application identité) pour faire disparaître v_{k-1} . En fait, en répétant le processus,

$$\left(\prod_{j=2}^k (f - \lambda_j id) \right) (w) = \prod_{j=2}^k (\lambda_1 - \lambda_j) v_1 \in W.$$

Il suit que $v_1 \in W$. Plus généralement, on peut considérer l'application

$$\left(\prod_{j \neq i} \frac{(f - \lambda_j id)}{\lambda_i - \lambda_j} \right) (w) = v_i,$$

qui implique que $v_i \in W \forall i$.

Une démonstration par récurrence sur le nombre de vecteurs de la décomposition de w peut également être faite.

Exercice 9. Soient K un corps, V un K -espace vectoriel, et f, g deux endomorphismes sur V .

Définition : deux applications linéaires f, g sont *simultanément diagonalisables* s'il existe une base commune de vecteurs propres de f et g .

Montrer que si f et g sont simultanément diagonalisables, alors f et g commutent.

Solution. Dans la base commune $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ de vecteurs propres de f et g , associés aux valeurs λ_i et μ_i respectivement pour chaque i , on a simplement

$$\begin{aligned} (f \circ g)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i b_i\right), \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \lambda_i b_i, \\ &= (g \circ f)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right). \end{aligned}$$

Exercice 10. (*)

Montrer la contraposée de l'exercice 9 : si f et g sont diagonalisables et commutent, alors f et g sont simultanément diagonalisables.

Solution. *En classe.*