Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 8

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Alors, la solution des moindres carrés $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème $\min_{x\in\mathbb{R}^2} ||Ax - b||^2$ satisfait

- ☐ *a)* $x_2 = 3$.
- ☐ *b)* $x_2 = -3$.
- ☐ *c)* $x_2 = 4$.
- ☐ *d)* $x_2 = -4$.

Exercice 3. Pour chaque forme suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

Si U dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer la partie (4.5) du théorème 4.13:

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\cap S^{n-1}} x^T Ax.$$

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

Montrer que

$$\lambda_k = \max_{dim(U) \leq n-k} \min_{x \in U^{\perp} \cap S^{n-1}} x^T A x,$$

où le maximum est pris sur les sous-espaces U de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. On définit l'ordre partiel $\geq$ sur les matrices par

$$R \geq S \text{ sur V} \iff x^T R x \geq x^T S x \ \forall x \in V.$$

Posons $N_A(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de A inférieures ou égales à λ. Montrer les équivalences suivantes.

1. $N_A(\lambda) \leq k \iff \lambda_{n-k} > \lambda$, et
2. $N_A(\lambda) \geq k \iff \lambda_{n-k+1} \leq \lambda$.

En déduire, à l'aide des deux exercices précédents, les propositions suivantes.

1. S'il existe un $\delta > 0$ et une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\operatorname{rang}(Q) \leq k$ vérifiant $A \geq (\lambda + \delta) I - Q$ sur $\mathbb{R}^n$, alors $N_A(\lambda) \leq k$.
2. Si pour chaque $\delta > 0$ il existe un sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $\dim(V) \geq k$ vérifiant $A \leq (\lambda + \delta) I$ sur V, alors $N_A(\lambda) \geq k$.

Exercice 7. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique.

Montrer, à partir du résultat du mini-examen 1 [1], que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont positifs ou nuls, c'est-à-dire $\det(A_I) \geq 0$ pour tout $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

[1] Le coefficient $n-k$ du polynôme caractéristique de A vérifie

$$a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \ldots, n\} \\ |I| = k}} \det(A_I),$$

où A_I est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de A d'indice dans I.