

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 8 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A = B^T B$.

Solution. A est une matrice symétrique donc il existe une matrice orthogonale P telle que

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A . Soit D la matrice $P^T A P$ diagonale. Comme A est définie positive, on a $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et alors $D = C^T C$, où

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Comme $P^T = P^{-1}$, on obtient que

$$A = P D P^T = P C^T C P^T = P C^T P^T P C P^T = (P C^T P^T) (P C P^T) = (P C P^T)^T (P C P^T).$$

ainsi $A = B^T B$, où $B = P C P^T$. Il reste à montrer que B est vraiment symétrique et définie positive. Les valeurs propres de B sont les mêmes de que les valeurs propres de C , donc B est définie positive. De plus,

$$B^T = (P C P^T)^T = (P^T)^T C^T P^T = P C P^T = B.$$

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Alors, la solution des moindres carrés $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|^2$ satisfait

a) $x_2 = 3$.

b) $x_2 = -3$.

c) $x_2 = 4$.

d) $x_2 = -4$.

Solution. Réponse d. On utilise Gram-Schmidt comme dans le théorème 2.21 ou bien on résoud le système $A^T Ax = A^T b$ pour trouver la solution

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

De manière alternative, on peut étudier $\|Ax - b\|^2$ en remplaçant x_2 par 3, -3, 4 et -4, ce qui donne quatre polynômes du second degré avec variable x_1 . On trouve alors que le polynôme avec $x_2 = -4$ possède l'unique minimum global minimal parmi les quatre polynômes.

Exercice 3. Pour chaque forme suivante Q , décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Solution.

a) On a que $Q(x) = x^T Ax$ où $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. L'équation caractéristique de A est

$$0 = \det(A - \lambda I) = (13 - \lambda)(7 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = (\lambda - 15)(\lambda - 5)$$

ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$ et $\lambda_2 = 5$. Comme toutes les valeurs propres de A sont positives, A est définie positive, et donc la forme quadratique Q est définie positive.

b) Similairement, $Q(x) = x^T Ax$ où $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Comme en a), on trouve que l'équation caractéristique de A est

$$0 = \det(A - \lambda I) = (11 - \lambda)(-1 - \lambda) - 64 = \lambda^2 - 10\lambda - 75 = (\lambda - 15)(\lambda + 5)$$

et les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$ et $\lambda_2 = -5$. Cela signifie que A et $Q(x)$ sont indéfinies. Pour trouver des vecteurs x et y qui satisfont

$Q(x) > 0$ et $Q(y) < 0$, on cherche les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . On trouve $x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Finalement, on vérifie que x et y sont les vecteurs satisfaisant:

$$Q(x) = x^T A x = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{30}{\sqrt{5}} \\ \frac{15}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 15 > 0$$

et similairement

$$Q(y) = y^T A y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{5}} \\ \frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -5 < 0.$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Si U dénote un sous-espace de \mathbb{R}^n , montrer la partie (4.5) du théorème 4.13:

$$\lambda_k = \min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x.$$

Solution. Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ respectivement. On fixe un entier k . Soit U un espace de dimension $n - k + 1$. Clairement, $\text{span}\{u_1, \dots, u_k\} \cap (U \cap S^{n-1}) \supsetneq \{0\}$, alors il existe un vecteur $0 \neq x = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \in (U \cap S^{n-1})$. Comme

$$x^T A x = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_k,$$

on a que $\max_{x \in (U \cap S^{n-1})} x^T A x \geq \lambda_k$. Comme c'est vrai pour chaque U de dimension $n - k + 1$, on conclut que

$$\min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in (U \cap S^{n-1})} x^T A x \geq \lambda_k.$$

Si on prend $W = \text{span}\{u_k, \dots, u_n\}$, pour chaque vecteur $x = \sum_{i=k}^n \beta_i u_i \in W \cap S^{n-1}$ (c.a.d. $\sum_{i=k}^n \beta_i^2 = 1$), on a

$$x^T A x = \sum_{i=k}^n \beta_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k$$

et $u_k^T A u_k = \lambda_k$. Donc $\max_{x \in W \cap S^{n-1}} x^T A x = \lambda_k$ et

$$\min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \max_{x \in W \cap S^{n-1}} x^T A x = \lambda_k.$$

Finalement, on conclut que $\lambda_k = \min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in U \setminus \{0\}} R_A(x)$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Montrer que

$$\lambda_k = \max_{\dim(U) \leq n-k} \min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x,$$

où le maximum est pris sur les sous-espaces U de \mathbb{R}^n .

Solution. Comme on a affaire à un max min, nous procédons de la manière suivante.

Soit un sous-espace $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension $n - k$. Montrons d'abord que $\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda_k$.

Remarquons que $\dim(U^\perp) = k$, et donc que U^\perp s'intersecte non trivialement avec l'espace engendré par $\{u_n, \dots, u_k\}$, les vecteurs propres du théorème spectral associés aux valeurs $\lambda_n, \dots, \lambda_k$. Pour n'importe quel vecteur unitaire w dans cette intersection, on trouve explicitement

$$w^T A w \leq \lambda_k.$$

Il suit alors que

$$\max_{\dim(U) = n-k} \min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda_k,$$

et il ne reste plus qu'à trouver un espace vectoriel U explicitement qui réalise le maximum.

Le cours ou la justification de l'exercice 4 ci-dessus nous mènent naturellement à considérer le U tel que $U^\perp = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$. Celui-ci vérifie $\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x = \lambda_k$, comme voulu.

Pour conclure, si $\dim(U) < n - k$, alors $\dim(U^\perp) > k$. Il existe donc un V de dimension k tel que $V \subset U^\perp$. Le minimum est ainsi pris sur U^\perp , un espace plus grand que V , et sa valeur est alors plus petite.

$$\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \min_{x \in V \cap S^{n-1}} x^T A x.$$

Ces plus petits espaces U n'ont donc aucune influence sur le maximum et l'égalité reste vraie si on étend le maximum à tous les espaces U de dimension inférieure ou égale $n - k$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. On définit l'ordre partiel \geq sur les matrices par

$$R \geq S \text{ sur } V \iff x^T R x \geq x^T S x \quad \forall x \in V.$$

Posons $N_A(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de A inférieures ou égales à λ . Montrer les équivalences suivantes.

1. $N_A(\lambda) \leq k \iff \lambda_{n-k} > \lambda$, et
2. $N_A(\lambda) \geq k \iff \lambda_{n-k+1} \leq \lambda$.

En déduire, à l'aide des deux exercices précédents, les propositions suivantes.

1. S'il existe un $\delta > 0$ et une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\text{rang}(Q) \leq k$ vérifiant $A \geq (\lambda + \delta)I - Q$ sur \mathbb{R}^n , alors $N_A(\lambda) \leq k$.
2. Si pour chaque $\delta > 0$ il existe un sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $\dim(V) \geq k$ vérifiant $A \leq (\lambda + \delta)I$ sur V , alors $N_A(\lambda) \geq k$.

Solution. Nous montrons uniquement les deux propositions à l'aide des équivalences.

1. Il s'agit ici de montrer que $\lambda_{n-k} > \lambda$. Utilisons donc la relation du type $\max \min$ de l'exercice 5. Pour pouvoir conclure, il faut alors trouver un espace vectoriel U de dimension au plus k tel que $\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x > \lambda$.

L'hypothèse sur A nous donne

$$x^T A x \geq \lambda + \delta - x^T Q x,$$

pour n'importe quel x unitaire de U^\perp .

Prenons donc $U = \text{Im}(Q)$, de sorte que $U^\perp = \ker(Q^T)$. Par suite, on a

$$\lambda_{n-k} \geq \min_{x \in \ker(Q^T) \cap S^{n-1}} x^T A x \geq \lambda + \delta > \lambda,$$

ce qui conclut.

2. Montrons que $\lambda_{n-k+1} \leq \lambda$. Par même raisonnement que ci-dessus, et grâce à l'exercice 4,

$$\max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \geq \lambda_{n-k+1},$$

pour n'importe quel sous-espace U de dimension k .

Or, par hypothèse,

$$x^T A x \leq \lambda + \delta,$$

pour tout $\delta > 0$ et x unitaire de V . En restreignant V à un sous-espace U de dimension k , on trouve bien,

$$\lambda_{n-k+1} \leq \max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \max_{x \in V \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda + \delta.$$

L'inégalité étant vraie pour tout $\delta > 0$, le résultat est démontré.

Exercice 7. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique.

Montrer, à partir du résultat du mini-examen 1¹, que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont positifs ou nuls, c'est-à-dire $\det(A_I) \geq 0$ pour tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Solution.

¹Le coefficient $n - k$ du polynôme caractéristique de A vérifie

$$a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \det(A_I),$$

où A_I est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de A d'indice dans I .