Corrigé Test 5 - Intégration 11.05.22

Le test dure 80 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée.

Exercice 1. *(6 points)*

On considère la fonction $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(2) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x < 2$. Calculer l'intégrale $\int_0^2 f(x)dx$ en utilisant les sommes de Darboux.
Utiliser une subdivision quelconque et préciser les valeurs de $s_\sigma(f)$, $S_\sigma(f)$, $s(f)$ et $S(f)$.
On choisit une subdivision quelconque $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2$. Alors

$$\begin{aligned}
s_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\
&= x_{n-1} - x_0 = x_{n-1}; \\
S_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\
&= x_n - x_0 = 2 - 0 = 2; \\
s(f) &= 2 \text{ et } S(f) = 2;
\end{aligned}$$

car x_{n-1} peut être choisi arbitrairement proche de 2. Ainsi, $\int_0^2 f(x)dx = 2$.

Exercice 2. *(4 points)*

Démontrer le théorème fondamental du calcul intégral :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Démonstration. Comme $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x)$ sont deux primitives de $f(x)$, elles diffèrent d'une constante, appelons-la c. Ainsi

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

$\square$

Exercice 3. *(17 points)*

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (3x-1)\cdot e^{-3x^2+2x} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-3x^2+2x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{3x^2+5}} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{4}(3x^2+5)^{\frac{2}{3}} + c,\ c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-3x-6}{x+1}$

Par la division euclidienne, on a $\dfrac{x^2-3x-6}{x+1} = x-4-\dfrac{2}{x+1}$, dont les primitives sont données par

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x - 2\ln(|x+1|) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+7}$ (complétion de carré)

On a

$$\frac{1}{x^2-4x+7} = \frac{1}{(x-2)^2+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{(x-2)^2}{3}+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(\frac{x-2}{\sqrt{3}})^2+1}.$$

Ainsi, $F(x) = \dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

e) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$ (décomposition en éléments simples)

On commence par décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{3x-7}{(x^2+4)(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+ax+bx+b+cx^2+4c}{(x^2+4)(x+1)}$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=3 \\ b+4c=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ b=3-a \\ 3-a-4a=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ b=3-a \\ -5a=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-2. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} &= \frac{2x+1}{x^2+4} + \frac{-2}{x+1} = \frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+4} - 2\cdot\frac{1}{x+1} \\ &= \frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} - 2\cdot\frac{1}{x+1}, \end{aligned}$$

dont les primitives sont données par

$$F(x) = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln(|x+1|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. *(5 points)*

Calculer le réel $a > 0$ de façon que l'aire du domaine limité par les courbes $y = x^2$ et $y = ax$ soit égale à 36.
On commence par chercher les points d'intersection :

$$x^2 = ax \Leftrightarrow x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(x-a) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } x = a.$$

Comme $ax > x^2$ si $x \in [0; a]$, l'aire du domaine est donné par

$$\int_0^a (ax - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{6}a^3$$

Ainsi, on a $\frac{1}{6}a^3 = 36 \Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = 6.$

Exercice 5. *(22 points)*

a) Calculer l'intégrale suivante en appliquant un changement de variables : $\displaystyle\int_1^5 (x+2)\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$

On pose $t = \sqrt{2x-1}$, donc $\varphi(t) = x = \dfrac{t^2+1}{2}$ et $\varphi'(t) = \dfrac{2t}{2} = t$. De plus, si $x \in [1; 5]$, alors $t \in [0; 3]$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_1^5 (x+2)\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 \frac{t^2+5}{2} \cdot t \cdot t\,\mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{t^4}{2} + \frac{5t^2}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{10} + \frac{5t^3}{6}\right]_1^3 \\ &= \frac{243}{10} + \frac{135}{6} - \frac{1}{10} - \frac{5}{6} = \frac{688}{15}.\end{aligned}$$

b) Calculer l'intégrale suivante par partie : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $u' = \cos(x)$, $u = \sin(x)$, $v = x$, $v' = 1$. On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [x\sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

c) Calculer l'intégrale suivante en appliquant le changement de variables $x = e^t$, puis en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose $x = \varphi(t) = e^t$, donc $\varphi'(t) = e^t$. Si $x \in [1; e]$, alors $t \in [0; 1]$. On calcule alors

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t}{(e^t)^2} \cdot e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{e^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 te^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On pose $u' = e^{-t}$, $u' = -e^{-t}$, $v = t$, $v' = 1$ et on obtient

$$\left[-te^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot (-e^{-t})\,\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-te^{-t} - e^{-t}\right]_0^1$$
$$= -e^{-1} - e^{-1} - (0-1) = 1 - \frac{2}{e}$$

d) Calculer, si possible, l'intégrale généralisée suivante : $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+\infty} x \cdot (x^2+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_{-1}^{+\infty}$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{2(t^2+1)}\right) - \frac{-1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$