Série 26

Pour le 10 mai 2023

Exercice 1

Continuité. Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sont-elles continues ? Dessine une esquisse de la fonction dans chaque cas.

a) $f(t) = (t, t^2)$;

b) $f(t) = (|t|, t^3)$;

c) $f(t) = \left(\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor, \cos t \right)$;

d) et enfin la fonction réelle $f : [0; 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = \left(\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor, \cos t, \sin t \right)$.

Exercice 2

Courbes paramétrées. Donne une formule en fonction du temps t qui décrit le mouvement d'un point se déplaçant

a) sur une droite passant par le point $(1; 2; 3)$ en $t = 0$ et de vecteur directeur $\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$;

b) sur une "hélice conique" (tourant autour de l'axe Oz sur un cône de révolution dont la droite génératrice fait un angle de $\pi/4$ avec la verticale) et se trouvant à hauteur t au temps t ;

Exercice 3

Les mouvements. Les formules suivantes définissent-elles des mouvements dans $\mathbb{R}^3$? On travaille avec des vecteurs $\vec{x}$ dans l'espace $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ et un paramètre $t \in [0, 1]$.

a) $g_t(\vec{x}) = \vec{x} + (1 + t)\vec{x}$.

b) $g_t(\vec{x}) = \vec{x}$.

c) $g_t(\vec{x}) = \vec{x} - t\vec{x}$.

d) $g_t(\vec{x}) = \vec{x} + t\vec{x}$.

e) $g_t(\vec{x}) = (I_3 + t(A - I_3))\vec{x}$, où A est une matrice de rotation.

Exercice 4

a) Ecris la formule matricielle d'un mouvement qui emmène un vecteur $\vec{x}$ du plan sur le vecteur $-\vec{x}$ par des rotations.

b) Décris en français (sans nécessairement donner la formule mathématique) un mouvement qui échange deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts et de même norme et emmène un troisième vecteur $\vec{x}$ orthogonal à chacun d'eux sur le vecteur $-\vec{x}$.

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Si une seule des fonctions de coordonnées d'une fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ n'est pas continue, alors f n'est pas continue.

b) Il existe un mouvement g_t dans le plan $\mathbb{R}^2$ tel que $g_{1/2}$ est l'identité, mais g_1 est une rotation.

c) Il existe un mouvement g_t dans le plan $\mathbb{R}^2$ tel que $g_{1/2}$ est une symétrie axiale, mais g_1 est l'identité.

d) Il existe un mouvement g_t dans le plan $\mathbb{R}^2$ tel que g_t est une translation différente de l'identité, mais g_1 est l'identité.

e) Toutes les applications bilinéaires $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de la forme $f(x, y) = axy + b$.

f) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orthogonaux. Alors la norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est toujours plus grande ou égale à la norme du vecteur $\rho_\alpha \vec{u} \wedge \rho_\beta(\vec{v})$, où ρ_α et ρ_β sont des rotations de centre $(0; 0; 0)$ et d'angle respectivement α et β.

g) Le produit vectoriel est associatif.

h) Le produit vectoriel n'est pas associatif, mais néanmoins $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}$.

i) Le produit vectoriel n'est pas associatif, mais néanmoins $\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{u}) = (\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u}$.

Exercice 6

Trouve l'équation du plan qui passe par les points $A = (1; 1; 1)$, $B = (1; 0; 1)$ et $C = (2; 2; 2)$.

Exercice 7

On se donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

b) Calcule l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Calcule l'angle formé par les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{w}$.

d) Calcule le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 8

On choisit une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ et on rappelle que $\vec{u}^t$ désigne le vecteur $\vec{u}$ *transposé*, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^t = (a \ b)$. Montre que l'application $\alpha : \mathbb{V}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ définie par $\alpha(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^t A \vec{v}$ est bilinéaire.
Existe-t-il une matrice A pour laquelle cette application donne le produit scalaire ?

Exercice 9

Soient $A = (1; 1; 1)$, $B = (1; 2; 3)$, $C = (2; 1; 3)$ et $D = (3; 2; 1)$. Calcule le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercices théoriques

Exercice 10

Le produit scalaire. On notera $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

a) Montre que le produit scalaire est bilinéaire, c'est-à-dire que si l'on fixe $\vec{x}$, l'application $\langle \vec{x}, - \rangle : \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ est linéaire et si l'on fixe $\vec{y}$, l'application $\langle -, \vec{y} \rangle : \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ est aussi linéaire.

b) Montre que le produit scalaire est invariant par rotation, c'est-à-dire que si ρ est une rotation de centre O, alors $\langle \rho(\vec{x}), \rho(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ pour tous les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$.

c) Le produit scalaire est-il la seule application bilinéaire $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$?

Exercice 11

Démontre en suivants les pas proposés que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{u}$$

pour des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$.

a) Montre que la formule est vraie lorsque $\vec{u} = \lambda \vec{e_1}$ et $\vec{v} = \mu \vec{e_2}$.

b) Montre qu'alors la formule est aussi vraie lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (utilise l'invariance par mouvement de sorte à effectuer une rotation qui envoie $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sur un multiple de $\vec{e_3}$).

c) Utilise la bilinéarité du produit vectoriel pour montrer qu'alors la formule est vraie en général (décompose $\vec{v}$ en une somme de deux vecteurs, dont l'un est orthogonal à $\vec{u}$).