# Série 29

Pour le 31 mai 2023

**Exercice 1**

Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 et $I$ son point milieu. Le point $P$ est un point arbitraire.

a) Montre que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = ||\overrightarrow{IP}||^2 - 16$.
**Indication :** Choisis deux points concrets $A$ et $B$ tels que $||\overrightarrow{AB}|| = 8$.

b) Détermine le lieu géométrique des points tels que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 9$.

c) Illustre cet exercice par un dessin précis à l'échelle (utilise règle et compas, ou logiciel mathématique).

**Exercice 2**

On se donne les points $A = (-2; 3)$, $B = (0; -1)$ et $C = (2; 1)$ dans le plan. Montre que le triangle $\Delta ABC$ est isocèle et calcule les coordonnées du centre du cercle circonscrit et son rayon.

**Exercice 3**

Soit $\Gamma$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$. Détermine les équations des tangentes au cercle passant par le point $P = (9; 4)$.

**Exercice 4**

**L'axe radical.** Soit $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ deux cercles dans le plan.

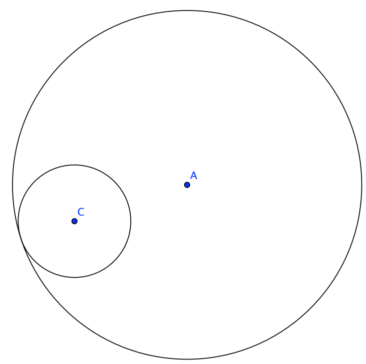
a) Détermine l'axe radical lorsque les cercles sont concentriques.

b) Montre que si les deux cercles ont une tangente commune, alors le point milieu du segment donné par les deux points de tangence appartient à l'axe radical.

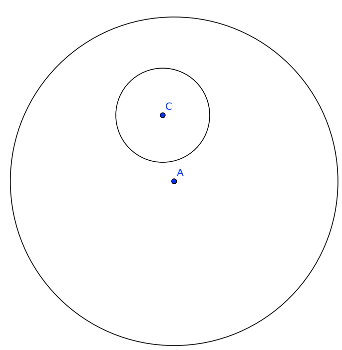
c) Quel est l'axe radical de deux cercles de rayon nul ?

d) Montre que la partie de l'axe radical situé à l'extérieur des deux cercles est le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux cercles des segments de tangentes de même longueur.

e) Construis l'axe radical dans la situation suivante :




f) Construis l'axe radical dans la situation suivante (utilise un troisième cercle pour lequel il est facile de construire l'axe radical avec chacun des deux cercles !) :




**Exercice 5**

**Sphères exinscrites.** On se donne un tétraèdre de sommets $A, B, C$ et $D$ dans l'espace. On cherche à construire des sphères tangentes simultanément aux quatre plans $ABC, ABD, ACD$ et $BCD$. Explique et justifie la construction des sphères exinscrites à ce tétraèdre. Combien y en a-t-il ?

**Exercice 6**

Soient $A = (2; 1; 0)$ et $B = (-1; 4; 2)$. Détermine l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

**Exercice 7**

**Angles et plans.** On considère les plans $\mathcal{P}$ donné par l'équation $x + y + z = 0$, $\mathcal{Q}$ donné par l'équation $-2x - 2y - 2z + 4 = 0$, $\mathcal{R}$ donné par l'équation $x - z = 1$ et $\mathcal{S}$ donné par l'équation $x - y - z = 1$.

a) Calcule l'angle que forment entre eux les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, puis $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

b) Calcule l'équation des plans bissecteurs des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$.

c) Calcule l'équation des plans bissecteurs des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

**Exercice 8**

**Vrai ou faux ?** Justifie briévement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) L'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est toujours celle d'un cercle.

b) La puissance d'un point par rapport à un cercle est négative si et seulement si le point est à l'intérieur du cercle.

c) La polaire relativement à un cercle d'un point du cercle est la droite passant par ce point et le centre du cercle.

d) La polaire du centre du cercle relativement à ce cercle est l'ensemble vide.

e) Lorsqu'elle est non vide, l'intersection de deux sphères est un cercle dont le centre se trouve sur la droite passant par les centres de ces sphères.

**Exercice 9**

Trois cercles de rayon 1 sont tangents deux à deux. Construis tous les cercles qui sont tangents simultanément à ces trois cercles.
**Indication.** Tu peux résoudre le problème de manière analytique en supposant que le centre du premier cercle est $(0; 0)$ et que le centre du second est $(2; 0)$. Trouve alors le centre du troisième cercle, puis celui des cercles tangents. Illustre ta résolution par un dessin précis.

**Exercice 10**

**Position relative.** On se donne une droite et un plan dans $\mathbb{R}^3$. Détermine dans chacun des cas suivants si la droite est disjointe du plan, si elle le coupe en un point ou si elle est contenue dans le plan.

a) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5-2t \\ z = 3+2t \end{cases}$ et $2x+y-z=0.$

b) $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 3+t \\ z = 1-t \end{cases}$ et $4x+y-11z=0.$

c) $\begin{cases} x-2y+z = 4 \\ x+3y-2z = 0 \end{cases}$ et $3x-2y+4z=0.$

**Exercices théoriques**

**Exercice 11**

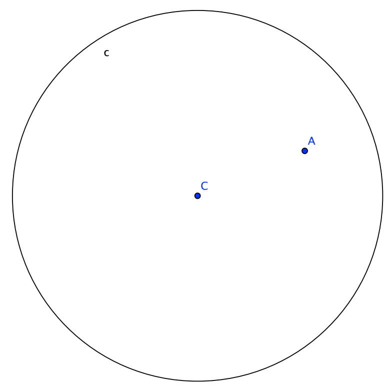
**Le pôle.** Soit $\Gamma$ un cercle de centre $C$ et $p$ une droite ne passant pas par le centre.

a) Montre qu'il existe un unique point $P$ dont la polaire est $p$.
Ce point $P$ s'appelle le pôle.

b) Montre que la polaire du point d'intersection de deux droites est la droite qui passe par leurs pôles.

c) Montre que le pôle d'une droite passant par deux points est l'intersection des polaires de ces deux points.

d) Construis la polaire du point $A$ par rapport au cercle donné et donne une marche à suivre rigoureuse (figure page suivante) :




**Exercice 12**

**Centre radical.** On se donne trois cercles dont les centres ne sont pas alignés. Le *centre radical* est le lieu des points du plan qui ont la même puissance relativement aux trois cercles.

a) Quel est ce lieu géométrique et pourquoi ?

b) Construis le centre radical dans la situation suivante. Construis aussi les trois axes radicaux :