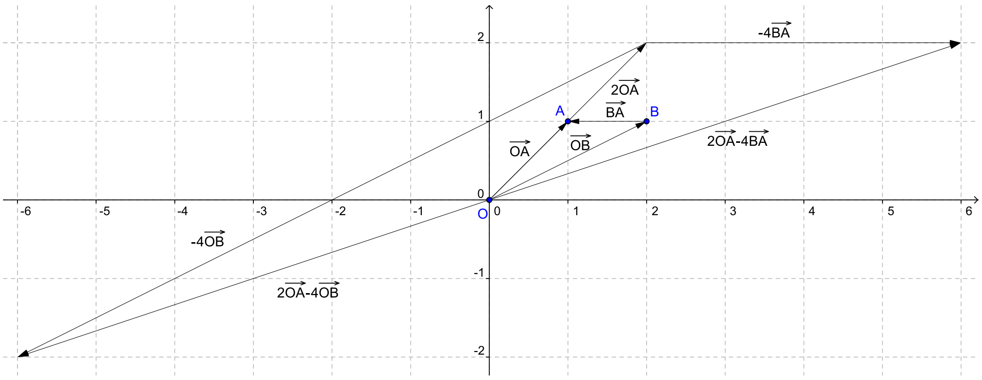
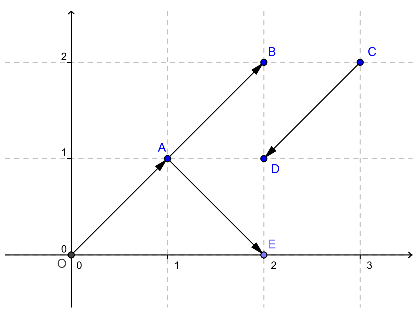
Exercice 1. De la même manière que pour $\mathbb{R}^n$, on peut définir des flèches dans $\mathbb{R}$ par une paire de points A et B où A est l'origine et B l'extrémité (avec A et B des nombres réels !). On remarque alors que les flèches ont une seule direction, mais toujours deux sens possibles : positif (si $B > A$) ou négatif (si B<A). On définit alors un vecteur sur $\mathbb{R}$ comme une classe d'équipollence de flèches. Ainsi l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même : un vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ est identifié avec le nombre réel $A - B$.

Exercice 2.



On a $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$,
$2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{OB} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$
et $2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{BA} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$. Finalement, on a $2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 3. Soient dans $\mathbb{R}^2$ les points O, A, B, C, D et E comme dans la figure :



a) Les flèches $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$.

b) Les flèches $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

c) Les vecteurs représentés par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

d) Les vecteurs représentés par $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Exercice 4. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Choisissons deux flèches $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ qui représentent ces vecteurs de manière à ce que l'extrémité de la première coïncide avec l'origine de la deuxième. Dans le plan ABC, plaçons un point D de telle sorte que $ABCD$ forme un parallélogramme, dégénéré au besoin (cette construction est possible, car même si $n \geq 3$, trois points forment un plan ou une droite dans $\mathbb{R}^n$). Donc $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Les égalités

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

montrent alors que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Exercice 5. Pour des questions de place(!), les vecteurs seront notés ici horizontalement plutôt qu'en colonne. Mais nous rappelons qu'on ne peut pas "faire des calculs" avec des points — seulement avec des vecteurs.

a) L'affirmation est fausse. En effet, si par exemple $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants (car $\vec{u} = 0 \cdot \vec{v}$) mais il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Par contre, si un vecteur est multiple d'un autre, alors les deux vecteurs sont linéairement dépendants. La condition "chacun d'eux est un multiple de l'autre" est en fait suffisante. Pour sa nécessité, il faut que les deux vecteurs soient soit tous les deux non-nuls, soit tous les deux nuls. En effet, si $\vec{u} = \vec{0} = \vec{v}$, alors ils sont chacun multiple de l'autre. S'ils sont tous les deux non-nuls, alors on a :

deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants
$\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}$ un vecteur est combinaison linéaire de l'autre (i.e $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$)
$\Longleftrightarrow$ un vecteur est multiple de l'autre
$\Longleftrightarrow$ chacun des deux vecteurs est multiple de l'autre.

b) Faux, les vecteurs $(0;1;0)$, $(0;0;1)$ et $(0;1;1)$ sont linéairement dépendants et pourtant aucune paire n'est colinéaire. (Mais trois vecteurs dont deux sont colinéaires sont linéairement dépendants.)

c) Vrai, supposons sans limiter la généralité que le vecteur nul est $\vec{u}$, alors $\vec{u} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w}$.

d) Vrai, montrons l'implication directe. Si un vecteur, disons $\vec{u}$, est combinaison linéaire des deux autres, alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = \mu \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$. Ce qui signifie en particulier que $\vec{u}$ appartient à un plan contenant $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (même si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, on peut trouver un plan qui les contient). Réciproquement, si $\vec{u}$ appartient à un plan contenant $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors il y a plusieurs cas à considérer : Si au moins l'un des trois vecteurs est nul, les trois vecteurs sont linéairement dépendants. Si aucun n'est nul, mais $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors les trois vecteurs sont linéairement dépendants. Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = \mu \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$, et donc les trois vecteurs sont linéairement dépendants.

e) Par l'exercice 1, deux vecteurs de $\mathbb{R}$ sont représentés par deux nombres réels a et b, et donc on a $a = \dfrac{a}{b} \cdot b$ si $b \neq 0$, ou $b = 0 \cdot a$ si $b = 0$, ce qui signifie que les vecteurs a et b sont linéairement dépendants.

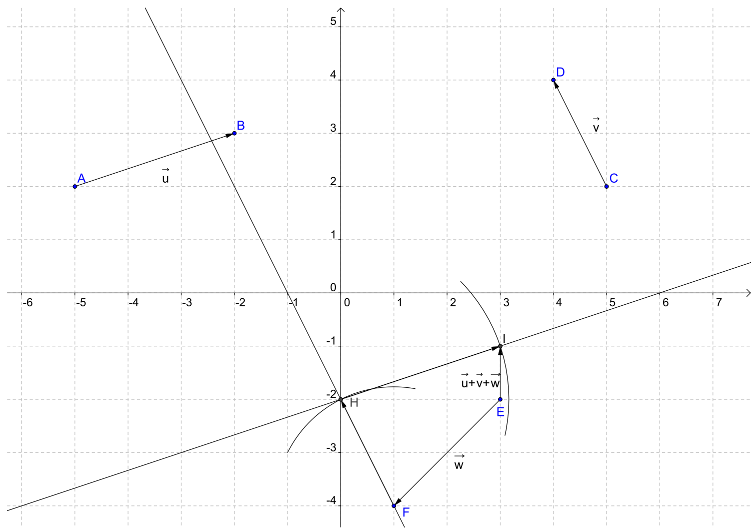
f) Faux, car deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ linéairement indépendants génèrent tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ (voir point (d)) et donc un troisième vecteur de $\mathbb{R}^2$ pourra s'écrire comme combinaison linéaire des deux premiers.

g) Vrai, par exemple les vecteurs $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ et $(0;0;1)$.

En général, il existe n vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$, mais m vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $m > n$ sont toujours linéairement dépendants.

Exercice 6.

a) Pour éviter de sortir de la feuille, construisons $\vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$, par commutativité de l'addition des vecteurs, cette somme est égale à celle demandée. Traçons la parallèle à CD par F, et reportons la distance $\overline{CD}$ en F, dans le sens de $\vec{v}$. On obtient alors le point H et $\overrightarrow{FH}$ représente le vecteur $\vec{v}$. Traçons ensuite la parallèle à AB par H, reportons la distance $\overline{AB}$ en H dans le sens de $\vec{u}$, on obtient le point I et $\overrightarrow{HI}$ représente le vecteur $\vec{u}$. Finalement on trace la flèche $\overrightarrow{EI}$ qui représente la somme $\vec{w} + \vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.



b) On a $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

De même, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

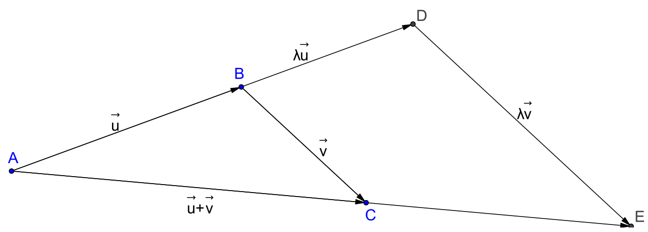
Ainsi $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Les flèches équipollentes à $\vec{u}$ sont toutes les flèches qui partant d'un point, se dirige vers un point situé 3 unités à droite et 1 unité vers le haut.

d) Par l'**Exercice 5 a)**, deux vecteurs sont linéairements dépendants si et seulement si l'un est multiple de l'autre. Or l'équation $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'admet pas de solution et donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

e) Trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ sont nécessairement linéairement dépendants (**Exercice 5 f)**).

Exercice 7. Traçons un vecteur $\vec{u}$ quelconque de A à B, un vecteur $\vec{v}$ quelconque de B à C, ainsi la flèche $\overrightarrow{AC}$ représente $\vec{u} + \vec{v}$. Traçons $[AD]$ tel que $(DB, A) = \lambda$, ainsi $\overrightarrow{AD} = \lambda\vec{u}$. Traçons la parallèle à BC par D. Par le théorème de Thalès, $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{BA}} = \lambda$ et donc $\overline{DE} = \lambda \cdot \overline{BC}$. Ce qui signifie, comme les droites BC et DE sont parallèles, que $\overrightarrow{DE} = \lambda\vec{v}$. Ainsi la flèche $\overrightarrow{AE}$ représente le vecteur $\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. Finalement, en appliquant à nouveau le théorème de Thalès, on a que $\overline{AE} = \lambda\overline{AC}$, autrement dit $\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u} + \vec{v})$.



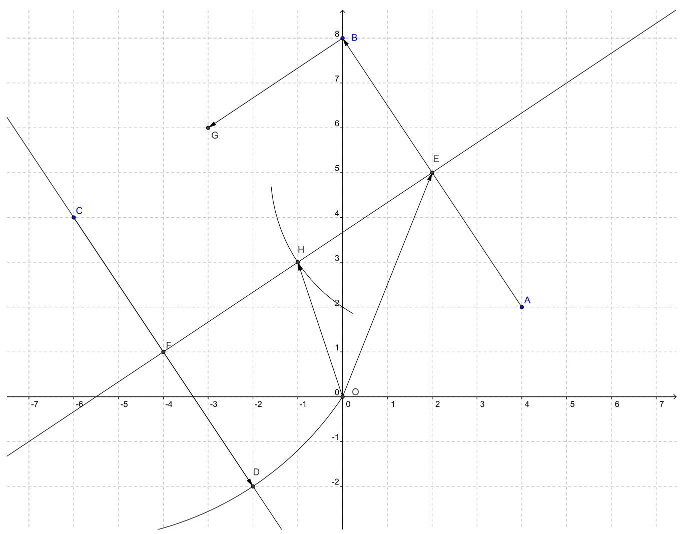
Exercice 8. Marche à suivre :

a) Tracer la parallèle à AB par C, reporter au compas la distance $\overline{AB}$ en C dans le sens opposé à $\overrightarrow{AB}$, on obtient le point D.

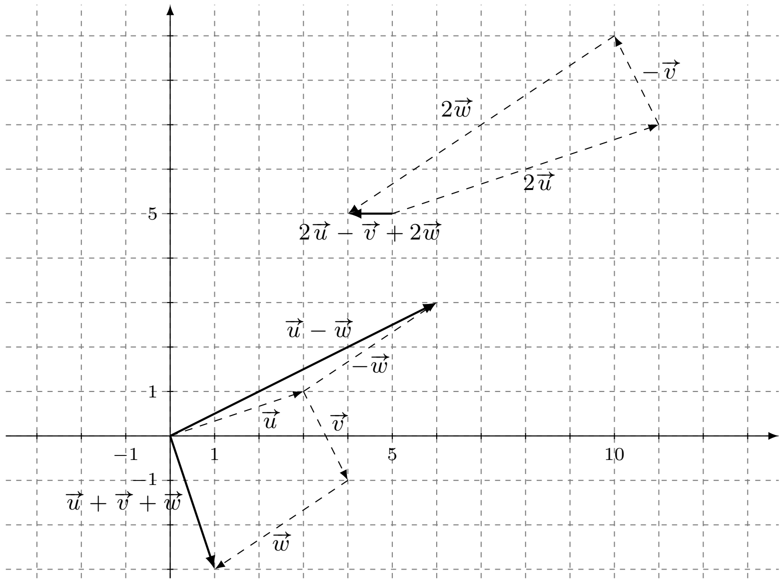
b) Construire le milieu E du segment $[AB]$. Le vecteur $\overrightarrow{OE}$ représente donc le vecteur $\overrightarrow{OA} + 1/2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

c) Construire le milieu G du segment $[BC]$, tracer la parallèle à BG par E et reporter la distance BG en E, on obtient le point H. Ainsi $\overrightarrow{OH}$ représente le vecteur $\overrightarrow{OA} + 1/2 \cdot \overrightarrow{AB} + 1/2 \cdot \overrightarrow{BC}$.

d) Le point H que nous avons construit est le centre du carré car G est le milieu du côté $[BC]$ et E le milieu du côté $[AB]$.

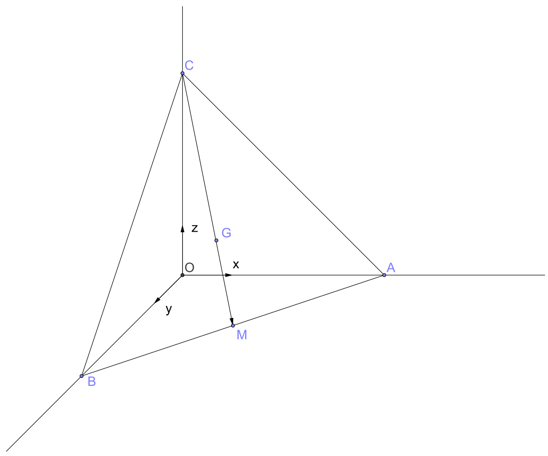


Exercice 9. Les trois vecteurs sont linéairement dépendants car 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ le sont obligatoirement (voir l'**Exercice 5**).



Exercice 10. Pour des questions de place, les vecteurs seront notés ici horizontalement plutôt qu'en colonne. Mais nous insistons sur le fait qu'on ne peut pas "faire des calculs" avec des points — seulement avec des vecteurs !

a) On a



b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0;4;0) - (4;0;0) = (-4;4;0)$,
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (0;0;4) - (0;4;0) = (0;-4;4)$.

c) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 1/2 \cdot \overrightarrow{AB} = (4;0;0) + 1/2(-4;4;0) = (2;2;0)$

d) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = (2;2;0) - (0;0;4) = (2;2;-4)$.

e) $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + 2/3 \cdot \overrightarrow{CM} = (0;0;4) + 2/3(2;2;-4) = (4/3;4/3;4/3)$, ce sont les coordonnées du point G. Voir la figure ci-dessus pour la position de G.

Exercice 11. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Exercice 12.

a) Considérons un triangle $\triangle ABC$ rectangle en B tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ et donc $\overline{AC} = 2$, et l'angle $\widehat{CAB}$ mesure $\pi/3$. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont alors $\begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{BC} \end{pmatrix}$. Par trigonométrie on a $2\sin(\pi/3) = \overline{CB} = \sqrt{3}$ et $2\cos(\pi/3) = \overline{AB} = 1$ et donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Comme le vecteur $\vec{v}$ est symétrique à $\vec{u}$ par l'axe Oy, on a que $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

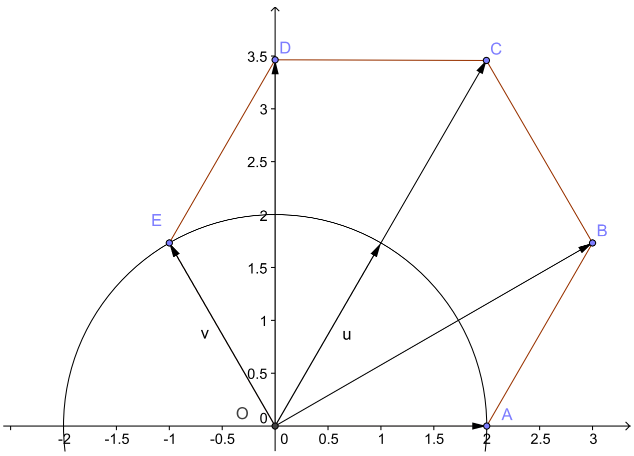
b) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} (= \vec{v})$.

c) On a



Exercice 13.

a) Grâce à la définition, deux flèches $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équivalente s'il existe une translation compsée à une rotation d'angle π transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$, ou s'il existe une translation transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$. Nous devons vérifier trois propriétés.

- Réflexivité. Toute flèche $\overrightarrow{AB}$ est équivalente à elle même puisque l'identité est une translation qui laisse la flèche $\overrightarrow{AB}$ fixe.
- Symétrie. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équivalentes, il existe une translation τ et une rotation ρ_π ou une translation σ tels que $\overrightarrow{AB} = \tau \circ \rho_\pi \left(\overrightarrow{CD}\right)$ ou $\overrightarrow{AB} = \sigma \left(\overrightarrow{CD}\right)$. On a alors $\rho_\pi \circ \tau^{-1} \left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{CD}$ ou $\sigma^{-1} \left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{CD}$.
- Transitivité. Supposons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équivalentes et $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ également. Considérons le cas où $\overrightarrow{AB} = \tau \circ \rho_\pi \left(\overrightarrow{CD}\right)$ et $\overrightarrow{CD} = \sigma \circ \rho_\pi \left(\overrightarrow{EF}\right)$. Alors $\overrightarrow{AB} = \tau \circ \rho_\pi \circ \sigma \circ \rho_\pi \left(\overrightarrow{EF}\right) = \tau \circ \rho_\pi \circ \rho_\pi \circ \sigma \left(\overrightarrow{EF}\right) = \tau \circ id \circ \sigma \left(\overrightarrow{EF}\right) = \tau \circ \sigma \left(\overrightarrow{EF}\right)$. Comme la composition de deux translations est une translation, on en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont équivalentes. Les autres cas se traitent de la même manière.

b) Supposons que la somme des deux classes d'équivalence soit la composition des transformations qui définissent les classes, alors on montre que cette notion n'est pas bien définie. En effet, en additionnant les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ qui sont dans la même classe d'équivalence on obtient le vecteur $\vec{0}$. Tandis que si nous additionnons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}$, on obtient le vecteur $2\vec{u}$ qui n'est pas équivalent au vecteur $\vec{0}$.

Exercice 14.

a) Pour que $\mathbb{R}[x]$ soit un groupe pour l'addition, il faut vérifier quatre propriétés.

i) **Loi de composition interne.** Il faut vérifier que l'addition de deux polynômes reste dans $\mathbb{R}[x]$, ce qui est immédiat.

ii) **Associativité.** Il faut vérifier que $(p(x)+q(x))+r(x) = p(x)+(q(x)+r(x))$ pour tous $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$. Soit $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ et n le degré maximum des ces trois polynômes. Si on note

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k \quad , \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k \qquad \text{et} \qquad r(x) = p(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k x^k$$

où les coefficients $p_{k+1}, \ldots, p_n$ sont nuls si le polynôme p est de degré $k < n$ (de même pour q et r). Alors :

$$\begin{aligned}(p(x)+q(x))+r(x) &= \left(\sum_{k=0}^n p_k x^k + \sum_{k=0}^n q_k x^k\right) + \sum_{k=0}^n r_k x^k = \sum_{k=0}^n (p_k+q_k)x^k + \sum_{k=0}^n r_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (p_k+q_k+r_k)x^k,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}p(x)+(q(x)+r(x)) &= \sum_{k=0}^n p_k x^k + \left(\sum_{k=0}^n q_k x^k + \sum_{k=0}^n r_k x^k\right) = \sum_{k=0}^n p_k x^k + \sum_{k=0}^n (q_k+r_k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (p_k+q_k+r_k)x^k.\end{aligned}$$

Comme ces deux résultats sont égaux, la somme de polynômes est bien associative.

iii) **Elément neutre.** Le polynôme identiquement nul est un élement neutre pour l'addition puisque $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$ pour tout $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

iv) **Inverse.** L'inverse du polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est le polynôme $-a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n$ car $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + (-a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n) = a_0 - a_0 + (a_1 - a_1)x + \cdots + (a_n - a_n)x^n = 0.$

De plus, pour que le groupe soit commutatif, il faut vérifier que $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$ pour tous $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$: En adoptant la même convention que pour l'associativité, on a

$$\sum_{k=0}^n p_k x^k + \sum_{k=0}^n q_k x^k = \sum_{k=0}^n (p_k+q_k)x^k = \sum_{k=0}^n (q_k+p_k)x^k = \sum_{k=0}^n q_k x^k + \sum_{k=0}^n p_k x^k,$$

où la deuxième égalité vient du fait que l'addition de deux nombre réels est commutative.

b) Pour tous polynômes $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il faut vérifier les propriétés suivantes :

i) **Distributivité de l'addition par rapport à la multiplication.** $(\lambda+\mu)p(x) = \lambda p(x) + \mu p(x)$;

ii) **Associativité.** $(\lambda\mu)p(x) = \lambda(\mu p(x)$;

iii) $1 \cdot p(x) = p(x)$;

iv) **Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.** $\lambda(p(x)+q(x)) = \lambda p(x) + \lambda q(x)$

Il est demandé de vérifier le point **iv)** : écrivons à nouveau $p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$ et $q(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$, alors

$$\begin{aligned}\lambda(p(x)+q(x)) &= \lambda\left(\sum_{k=0}^n p_k x^k + \sum_{k=0}^n q_k x^k\right) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^n (p_k+q_k)x^k = \sum_{k=0}^n \lambda \cdot (p_k+q_k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \lambda p_k x^k + \sum_{k=0}^n \lambda q_k x^k = \lambda p(x) + \lambda q(x).\end{aligned}$$

c) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$. Alors par identification des coefficients, on a que $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$, ce qui prouve que ces trois polynômes sont linéairement indépendants.

d) On a $(1+x) - (1-x) = 2x$, ce qui prouve que les trois polynômes sont linéairement dépendants.