| | |
|---|---|
| EPFL - Printemps 2023 | Prof. Zs. Patakfalvi |
| **Anneaux et Corps** | **Exercices** |
| Série 10 | 8 mai 2023 |

**Exercice 1.**
Soient $K \subset L \subset F$ des extensions de corps. Si $K \subset L$ et $L \subset F$ sont algébriques, montrez qu'il en est de même pour $K \subset F$.

**Exercice 2.**
Soit $n > 0$ un entier positif. Montrez que $\cos(2\pi/n)$ et $\sin(2\pi/n)$ sont des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 3.**
Soit $\mathbb{Q}(x)$ le corps de fractions de l'anneau polynomial $\mathbb{Q}[x]$, et considérons

$$s := \frac{x^3+2}{x} \in \mathbb{Q}(x).$$

On a les extensions successives $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(s) \subset \mathbb{Q}(x)$.

1. Montrez que $\mathbb{Q}(x)$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}(s)$.
2. Calculez $[\mathbb{Q}(s) : \mathbb{Q}]$ et $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(s)]$.

**Exercice 4.**
Soit $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ pour un entier $n > 2$. Démontrez que les corps de décomposition de $x^n - 2$ et de $x^{2n} - 3x^n + 2$ sur $\mathbb{Q}$ sont les mêmes, et ils sont les mêmes aussi que le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par $\xi$ et $\sqrt[n]{2}$.

**Exercice 5.**
1. Montrez qu'il existe que 2 polynômes irréductibles de degré 3 sur $\mathbb{F}_2$.
2. Soit $f$ et $g$ ces deux polynômes. Montrez que tous les deux $f$ et $g$ obtient 3 racines distinctes dans $K = \mathbb{F}_2[x]/(f)$ .
3. Montrez que les corps de décomposition de ces 2 polynômes sont les mêmes, et il est isomorphe à $K = \mathbb{F}_2[x]/(f)$.

**Exercice 6.**
1. Considérons la situation suivante:
   - $\phi : K \to K'$ est un isomorphisme des corps,
   - $K \subseteq L$ et $K' \subseteq L'$ sont deux extensions de corps
   - $L = K(\alpha)$ et $L' = K(\alpha')$ avec $\alpha$ et $\alpha'$ algébriques sur $K$ et $K'$ respectivement
   - si $\xi : K[x] \to K'[x]$ est l'homomorphisme induit par $\phi$, alors $\xi(m_{\alpha,K}) = m_{\alpha',K'}$

   Démontrez qu'il existe une extension unique de $\phi$ à un isomorphisme $\eta : L \to L'$ tel que $\eta(\alpha) = \alpha'$
2. Démontrez que $K(x)[\sqrt{x+1}] \cong K(x)[\sqrt{x+2}]$
3. Démontrez que $K(x,y)[\sqrt{xy}] \cong K(x,y)[\sqrt{x(x+y)}]$