Corrigé série 25

Exercice 1 (10 points)

a) Soit $I = \int_{1^+}^{2} \frac{1}{x-1}\, dx$. Par le changement de variables $y = x-1$, on voit que

$$I = \int_{0^+}^{1} \frac{1}{y}\, dy,$$

et on sait par le Théorème 1.3 des notes que cette intégrale diverge.

b) Soit $I = \int_{1^+}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$. Effectuons le changement de variables $y = x-1$. Alors, on a que

$$I = \int_{0^+}^{1} \frac{1}{y^{1/2}}\, dy,$$

ce qui existe par le Théorème 1.3. (En fait, $I = 2$.)

c) Soit $I = \int_{1^+}^{2} \frac{1}{(x-1)^7}\, dx$. Effectuons le changement de variables $y = x-1$. Alors, on a que

$$I = \int_{0^+}^{1} \frac{1}{y^7}\, dy,$$

ce qui diverge par le Théorème 1.3.

d) Notons que, pour tout $x \in]0,1[$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots < 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Note aussi que $0 < \frac{1}{e^x - 1}$ pour tout $x \in]0,1[$. Ainsi,

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{e^x-1}\, dx > \int_{0^+}^{1} \frac{1}{1-x}\, dx.$$

Mais, $\int_{0^+}^{1} \frac{1}{1-x}\, dx$ diverge, donc $\int_{0^+}^{1} \frac{1}{e^x-1}\, dx$ diverge aussi.

Exercice 2 (10 points)

a) On a que
$$\int_{0^+}^{1} \ln x \, dx = (1 \cdot \ln 1 - 1) - \lim_{y \to 0^+} (y \ln y - y) = -1.$$

b) Soit $y = x + 1$. Alors,
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2+4} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2+4} \, dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1} \, dx \\ = \frac{1}{2} \left[\lim_{y \to \infty} \left(\arctan \frac{y}{2} \right) - \lim_{y \to -\infty} \left(\arctan \frac{y}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

c) En utilisant la décomposition en éléments simples, on trouve que
$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty} \frac{3x-1}{x(4x^2+1)} \, dx &= \int_{1}^{\infty} \frac{4x}{4x^2+1} \, dx + \int_{1}^{\infty} \frac{3}{4x^2+1} \, dx - \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \log(4x^2+1) \right]_1^{\infty} + \left[\frac{3}{2} \arctan 2x \right]_1^{\infty} - [\log x]_1^{\infty} \\ &= \left[\log \sqrt{4 + 1/x^2} \right]_1^{\infty} + \frac{3}{4} (\pi - 2 \arctan 2) \\ &= \log \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{4} (\pi - 2 \arctan 2) .\end{aligned}$$

d) On a que
$$\int_{0}^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left(\lim_{x \to 1^-} \arcsin x \right) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

e) Effectuons le changement de variables $u = x - 1$. Alors,
$$I = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} \, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(u-1)\sqrt{u}} \, du.$$

Maintenant, effectuons le changement de variables $w = \sqrt{u}$. Alors, $dw = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$ et on trouve que
$$I = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{w^2+1} \, dw = [2 \arctan w]_0^{\infty} = \pi.$$

Exercice 3 (10 points)

a) Effectuons le changement de variables $t^2 = e^x - 1$. Alors $\varphi(t) = \ln(t+1)$ et $\varphi'(t) = \frac{2t}{t^2+1}$, donc
$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \, dx = \int_{\sqrt{e-1}}^{\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2+1} \, dt = \pi - 2 \arctan \sqrt{e-1}.$$

b) Effectuons le changement de variables $x = \varphi(t) = t^2$. Alors, $\varphi'(t) = 2t$ et donc

$$I = \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty 2te^{-t}\,dt.$$

En intégrant par parties, on trouve que

$$I = \left[-2te^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2e^{-t}dt = \left[-2te^{-t} - 2e^{-t}\right]_0^\infty = 2.$$

c) Effectuons le changement de variables $t = \tan x$. Alors $\varphi(t) = \arctan(t)$ et $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$, donc

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/2^-} \frac{1}{4+\tan^2 x}\,dx &= \int_0^\infty \frac{1}{4+t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}dt = \int_0^\infty \frac{1}{3(t^2+1)} - \frac{1}{3(t^2+4)}\,dt \\ &= \frac{1}{3}(\arctan\infty - \arctan 0) - \frac{1}{6}(\arctan\infty - \arctan 0) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 4 (10 points)

a) **Faux.** Par exemple, prendre $f(x) = 1$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$.

b) **Vrai.** Effectuer le changement de variables $y = 1 - x$ pour le voir.

c) **Faux.** Voir l'Exercice 5.

d) **Vrai.** Comme f est continue, l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$ existe. Ainsi, la somme des trois intégrales sur les intervalles $]-\infty, 0]$, $[0,5]$, et $[5,\infty[$ existe aussi.

Exercice 5 (5 points)

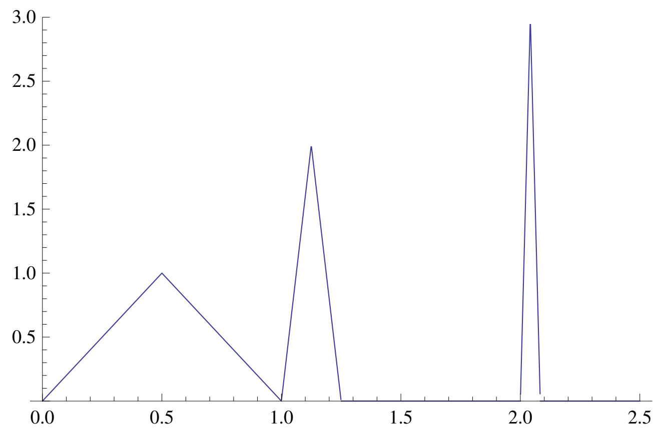
Rappelons que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

On voudrait utiliser la convergence de cette série infinie. On construit $f(x)$ comme suit. Pour chaque $n = 0, 1, 2, \ldots$, on pose

$$f(x) = \begin{cases} 2^{n+1}(n+1)^2(x-n) & \text{si } x \in \left[n, n+\frac{1}{2^{n+1}(1+n)}\right], \\ -2^{n+1}(n+1)^2(x-n-\frac{1}{2^n(1+n)}) & \text{si } x \in \left[n+\frac{1}{2^{n+1}(1+n)}, n+\frac{1}{2^n(1+n)}\right], \\ 0 & \text{si } x \in \left[n+\frac{1}{2^n(1+n)}, n+1\right]. \end{cases}$$

Tout cela semble compliqué, mais l'idée est simple. Dans chaque intervalle $[n, n+1]$, $f(x)$ fait un triangle isocèle de hauteur $n+1$ avec une base étroite de longueur $\dfrac{1}{2^n(1+n)}$. (Donc, en générale, sur la plupart de l'intervalle, $f(x)$ est nulle.) Note aussi que f n'est pas bornée, et que l'aire du triangles de l'intervalle $[n, n+1]$ est $\dfrac{1}{2^{n+1}}$. (Voir le diagramme ci-dessous.) Donc, on a décrit une fonction non-bornée f telle que $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$.



Exercice 6 (10 points)

a) La fonction $\dfrac{1}{1-x}$ est croissante sur l'intervalle $[0,1[$. Ainsi, pour tout $t \in [a_k, b_k]$, on a que

$$\frac{1}{1-t} \in \left[\frac{1}{1-a_k}, \frac{1}{1-b_k}\right] = \left[2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right].$$

Par conséquent,

$$\left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right| \geq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$$

pour tout $t \in [a_k, b_k]$.

b) Par la dernière partie et le fait que $\dfrac{1}{1-x}$ est croissante sur l'intervalle $[0,1[$, on trouve que

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{1}{1-x}\left|\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right| dx \geq \frac{1}{2}\int_{a_k}^{b_k} \frac{1}{1-x}\, dx \geq \frac{1}{2}\cdot(b_k - a_k)\cdot\frac{1}{1-a_k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6k+2}.$$

c) Observons que si $k \neq m$, $[a_k, b_k] \cap [a_m, b_m] = \emptyset$. Observons aussi que $[a_k, b_k] \subset [0,1[$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ainsi, il est immédiat de la dernière partie que

$$\int_0^{1^-} \frac{1}{1-x}\left|\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right| dx \geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{6k+2}.$$

d) La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{6k+2}$ diverge. Ainsi, par la dernière partie, l'intégrale

$$\int_0^{1^-} \frac{1}{1-x}\left|\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right| dx$$

diverge.

Exercice 7 (10 points)

a) Observons que si $x \in]0;1]$,

$$|\ln x| = \ln \frac{1}{x}.$$

Pour montrer que

$$\ln \frac{1}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}},$$

il suffit de montrer que

$$\frac{1}{x} \leq e^{2/\sqrt{x}}.$$

Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots,$$

on a que

$$e^{2/\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} + \cdots.$$

Comme $x > 0$, il est maintenant clair que

$$e^{2/\sqrt{x}} > \frac{1}{x}.$$

b) En utilisant la première partie, on a que

$$\int_{0^+}^{1} \left| \frac{\ln x}{1+x^2} \right| dx \leq \int_{0^+}^{1} \frac{2}{x^{1/2}+x^{5/2}}\, dx < \int_{0^+}^{1} \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx = 4,$$

Il suit que $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 8 (10 points)

a) Pour tout $x \in [a,b[$, soient $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$. Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge, alors, par définition, la limite $\displaystyle\lim_{x\to b^-} G(x)$ existe. Notons que $0 \leq F(x) \leq G(x)$ pour tout $x \in [a,b[$. Ainsi, on a que

$$0 \leq \lim_{x\to b^-} F(x) \leq \lim_{x\to b^-} G(x),$$

c'est-à-dire que

$$0 \leq \int_a^{b^-} f(x)\,dx \leq \int_a^{b^-} g(x)\,dx < \infty.$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ converge aussi.

b) Cette partie est la contraposée de la partie précédente.

Exercice 9 (10 points)

a) Supposons que $\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx$ converge pour un certain $c \in]a, b[$, c'est-à-dire que les intégrales $\int_{a^+}^{c} f(x)\,dx$ et $\int_{c}^{b^-} f(x)\,dx$ convergent. Soit $d \in]a, b[$. Supposons que $d \geq c$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx &= \int_{a^+}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b^-} f(x)\,dx \\ &= \int_{a^+}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{b^-} f(x)\,dx \\ &= \int_{a^+}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{b^-} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx$ converge pour d aussi. De même, $\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx$ converge si $d \leq c$ aussi. Ainsi, $\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx$ converge pour tout autre d aussi.

b) Prendre $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1$, et $b = 0$. Pour tout $c \in]a, b[$, on a que $\int_{a^+}^{c} f(x)\,dx$ converge, alors que $\int_{c}^{b^-} f(x)\,dx$ diverge.

Exercice 10 (10 points)

a) Observons que

$$\int_{0^+}^{1/2} \frac{1}{x^r}\,dx \leq \int_{0^+}^{1/2} \frac{1}{x^r(1-x)^s}\,dx \leq 2^s \int_{0^+}^{1/2} \frac{1}{x^r}\,dx.$$

Il suit que $\int_{0^+}^{1/2} \frac{1}{x^r(1-x)^s}\,dx$ converge si et seulement si $r < 1$.

b) On peut prouver de la même façon que $\int_{1/2}^{1^-} \frac{1}{x^r(1-x)^s}\,dx$ converge si et seulement si $s < 1$.

c) Cette partie suit immédiatement des deux premières parties.