Corrigé A du test 5 : Intégration.

Exercice 1 (4 + 6 + 4 + 6 = 20 pts)

Calculer toutes les primitives des fonctions suivantes

a) $f(x) = (2 + x^3)\sqrt{x} \;=\; 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{7}{2}} \;\Rightarrow\; F(x) = \dfrac{4}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{2}{9}\,x^{\frac{9}{2}} + c \;=\; \dfrac{4}{3}\,x\sqrt{x} + \dfrac{2}{9}\,x^4\sqrt{x} + c,\;\; c \in \mathbb{R}$

b) On pose $t = x - 5 \;\Leftrightarrow\; x = t + 5 = \varphi(t) \;\Rightarrow\; \varphi'(t) = 1$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{(t+5)^2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \;=\; \int \frac{t^2 + 10t + 25}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \;=\; \int t^{\frac{3}{2}} + 10\,t^{\frac{1}{2}} + 25\,t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \;=$$

$$\frac{2}{5}\,t^{\frac{5}{2}} + \frac{20}{3}\,t^{\frac{3}{2}} + 50\,t^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + \frac{20}{3}\sqrt{t^3} + 50\sqrt{t} + c,\;\; c \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $F(x) \;=\; \dfrac{2}{5}\,(x-5)^2\sqrt{x-5} + \dfrac{20}{3}\,(x-5)\sqrt{x-5} + 50\sqrt{x-5} + c,\;\; c \in \mathbb{R}$

Autre changement de variable possible :

$t = \sqrt{x-5} \;\Leftrightarrow\; x = t^2 + 5 = \varphi(t) \;\Rightarrow\; \varphi'(t) = 2t$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{(t^2+5)^2}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t \;=\; 2\int t^4 + 10t^2 + 25\,\mathrm{d}t \;=\; 2\left(\frac{1}{5}\,t^5 + \frac{10}{3}\,t^3 + 25\,t\right) + c,\;\; c \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $F(x) \;=\; \dfrac{2}{5}\,(x-5)^2\sqrt{x-5} + \dfrac{20}{3}\,(x-5)\sqrt{x-5} + 50\sqrt{x-5} + c,\;\; c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 41} = \dfrac{1}{(x-4)^2 - 16 + 41} = \dfrac{1}{(x-4)^2 + 25}$

On pose $t = x - 4 \;\Leftrightarrow\; x = t + 4 = \varphi(t) \;\Rightarrow\; \varphi'(t) = 1$ d'où $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + 25} = \dfrac{1}{25}\,\dfrac{1}{(\frac{t}{5})^2 + 1}$

$F(t) = \dfrac{1}{25}\cdot 5\;\arctan\left(\dfrac{t}{5}\right) + c$ et $F(x) = \dfrac{1}{5}\cdot\arctan\left(\dfrac{x-4}{5}\right) + c,\;\; c \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} \;=\; \dfrac{3x^2 - 3x + 2}{(x-1)\,(x^2+1)} \;=\; \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx + c}{x^2 + 1} \;=\; \dfrac{a(x^2+1) + (bx+c)(x-1)}{(x-1)\,(x^2+1)}$

$= \dfrac{ax^2 + a + bx^2 - bx + cx - c}{(x-1)\,(x^2+1)} = \dfrac{(a+b)x^2 + (c-b)x + (a-c)}{(x-1)\,(x^2+1)} \qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Il faut donc que $\left\{\begin{array}{rcr|l} a+b & = & 3 & 1 \\ c-b & = & -3 & 1 \\ a-c & = & 2 & 1 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcr} 2a & = & 2 \\ c-b & = & -3 \\ a-c & = & 2 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcr} a & = & 1 \\ b & = & 2 \\ c & = & -1 \end{array}\right.$

$$\int \frac{3x^2 - 3x + 2}{(x-1)\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \;=$$

$\ln|x-1| + \ln(x^2+1) - \arctan x + c \;=\; \ln\big|(x-1)(x^2+1)\big| - \arctan x + c,\;\; c \in \mathbb{R}$

Exercice 2 $(4 + 4 + 4 + 6 + 4 = 22$ pts)

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 2x - 3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - 3x + \ln(x) + \frac{1}{x}\right]_1^3 =$

$\displaystyle 9 - 9 + \ln(3) + \frac{1}{3} - 1 + 3 - \ln(1) - 1 = \frac{4}{3} + \ln 3$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{16x + 10}{\sqrt{1 + 5x + 4x^2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^2 \frac{8x + 15}{\sqrt{1 + 5x + 4x^2}}\mathrm{d}x = 2\left[2\sqrt{1 + 5x + 4x^2}\right]_0^2 = 4 \cdot (3\sqrt{3} - 1)$

c) $\displaystyle t = 7x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{7}\,t \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{1}{7}\,\mathrm{d}t \qquad x = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0$ et $\displaystyle x = \frac{\pi}{14} \;\Leftrightarrow\; t = \frac{\pi}{2}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{14}} \sin^3(7x) \cdot \cos(7x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cdot \cos(t)\,\frac{1}{7}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{28}\sin^4 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{28}$

d) $\displaystyle x = \sqrt{11}\sin t \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \sqrt{11}\cos t\,\mathrm{d}t \qquad x = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0$ et $\displaystyle x = \frac{\sqrt{11}}{2} \;\Leftrightarrow\; t = \frac{\pi}{6}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{11}}{2}} \sqrt{11 - x^2}\;\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{11 - 11\sin^2 t} \cdot \sqrt{11}\cos t\;\mathrm{d}t = 11\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\;\mathrm{d}t =$

$\displaystyle 11\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 11\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 11\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2t) + 1}{2}\,\mathrm{d}t = 11\left[\frac{2t + \sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 11\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

e) $\displaystyle u = \frac{x}{3} \;\Rightarrow\; u' = \frac{1}{3} \qquad v' = e^x \;\Rightarrow\; v = e^x$

$\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{x}{3} \cdot e^x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{3} \cdot e^x\right]_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} \frac{1}{3} \cdot e^x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{3} \cdot e^x - \frac{1}{3} \cdot e^x\right]_0^{\ln 3} = \ln 3 - 1 - 0 + \frac{1}{3} = \ln 3 - \frac{2}{3}$

Exercice 3 $(1 + 7 = 8$ pts)

a) On calcule $f(1) = g(1) = 1$.

b) $\displaystyle g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 5$ d'où

$\displaystyle A_{\mathcal{D}} = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx - \int_1^5 \left(-\frac{1}{4}x + 5\right)\,dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 - \left[-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}\,x\right]_1^5 =$

$\displaystyle \frac{3}{4}\,(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}) + \frac{5^2}{8} - \frac{5^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{5}{4} = \frac{3}{4}\,(2^4 - 1) + \frac{25 - 50 - 1 + 10}{8} = \frac{45}{4} - 2 = \frac{37}{4}$

Exercice 4 (5 pts)

Montrer que la longueur de la courbe de la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{6}\right]$ se situe dans l'intervalle $\left[\frac{\pi\sqrt{7}}{12}\,;\,\frac{\pi\sqrt{2}}{6}\right]$.

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Or, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \le \cos x \le \cos 0 = 1 \ \forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{6}\right]$ et donc $\frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{1+\frac{3}{4}} \le \sqrt{1+\cos^2(x)} \le \sqrt{2}$

Ainsi, $\frac{\pi\sqrt{7}}{12} = \frac{\pi}{6}\,\frac{\sqrt{7}}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{d}x \le L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}\sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.

Exercice 5 (5 + 3 = 8 pts)

a) Théorème de la moyenne.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors un élément c de $[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Démonstration : Soit m le minimum de la fonction f sur $[a,b]$ et M son maximum.

Comme $m \le f(x) \le M$ pour tout x, on a que

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M(b-a).$$

Ainsi, la valeur $h = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ est comprise entre m et M.

Comme f est continue, par le Théorème de la valeur intermédiaire, il existe un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = h$. D'où le résultat.

b) Théorème fondamental du calcul intégral :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Exercice 6 (5 + 2 = 7 pts)

a) f impaire sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ et le graphe de f a l'origine pour centre de symétrie.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\int_{-t}^0 f(x)\,dx = -\int_0^t f(x)\,dx$ et pour toute primitive F de f, on a

$F(0) - F(-t) = \int_{-t}^0 f(x)\,dx = -\int_0^t f(x)\,dx = -F(t) + F(0)$, c'est-à-dire $F(-t) = F(t)$.

b) f est continue et impaire sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{\sin(x)}{x^2+1} = -f(x)$.

Ainsi, toutes ses primitives F sont paires et $\int_{-a}^a \frac{\sin(x)}{x^2+1}\,dx = F(a) - F(-a) = 0$.