Corrigé Test 5 - Intégration | Mai 2023 - Rattrapage

Le test dure 105 minutes.
Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée.

Exercice 1. *(5 points)*

Soit $f : [1; 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Calculer les valeurs de $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$ pour une subdivision σ quelconque, puis $s(f)$ et $S(f)$. La fonction f est-elle intégrable ou non ?

On choisit une subdivision quelconque $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2$. Alors

$$\begin{aligned}
s_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \cdot (x_1 - x_0) + 0 \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) = 0 \\
S_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\
&= x_n - x_0 = 2 - 1 = 1; \\
s(f) &= 0 \text{ et } S(f) = 1;
\end{aligned}$$

Ainsi, f n'est pas intégrable.

Exercice 2. *(4 points)*

Démontrer le théorème fondamental du calcul intégral :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Démonstration. Comme $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x)$ sont deux primitives de $f(x)$, elles diffèrent d'une constante, appelons-la c. Ainsi

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

□

Exercice 3. *(20 points)*

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 8x \cdot (1-3x^2)^5 \Rightarrow\ F(x) = -\frac{8}{6} \cdot \frac{1}{6}(1-3x^2)^6 + c = -\frac{2}{9}(1-3x^2)^6,\ c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$

$f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2} = 2x + \dfrac{1}{x^2} = 2x + x^{-2} \Rightarrow\ F(x) = x^2 - x^{-1} + c = x^2 - \dfrac{1}{x} + c = \dfrac{x^3-1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+5} \Rightarrow\ F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + c,\ c \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+7}$ (complétion de carré)

On a

$$\frac{1}{x^2-4x+7} = \frac{1}{(x-2)^2+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{(x-2)^2}{3}+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\frac{x-2}{\sqrt{3}})^2+1}.$$

Ainsi, $F(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

e) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$ (décomposition en éléments simples)

On commence par décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{3x-7}{(x^2+4)(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+ax+bx+b+cx^2+4c}{(x^2+4)(x+1)}$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=3 \\ b+4c=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ b=3-a \\ 3-a-4a=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ b=3-a \\ -5a=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-2. \end{cases}$$

On a donc

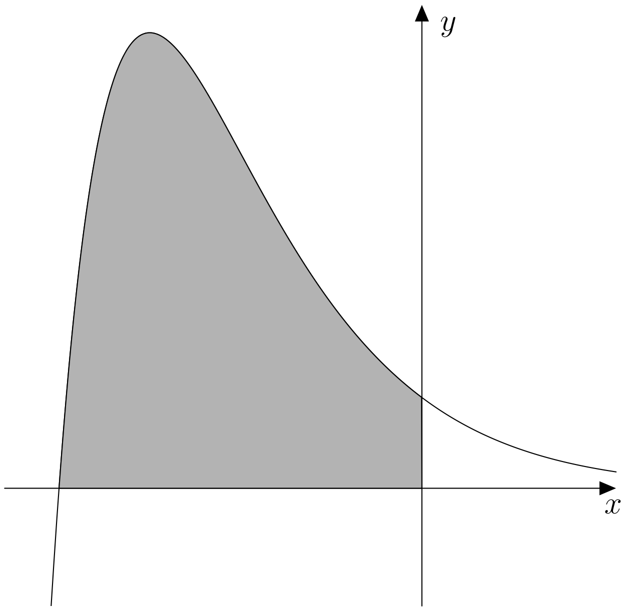
$$\begin{aligned} \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} &= \frac{2x+1}{x^2+4} + \frac{-2}{x+1} = \frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+4} - 2 \cdot \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} - 2 \cdot \frac{1}{x+1}, \end{aligned}$$

dont les primitives sont données par

$$F(x) = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln(|x+1|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. *(6 points)*

On a représenté la courbe associée à la fonction $u(x) = (x+4)e^{-x}$.
Déterminer l'aire du domaine grisé fermé délimité par la courbe et les axes de coordonnées.



On remarque que le zéro de la fonction est en $x = -4$.
L'aire est donc égale à $A = \displaystyle\int_{-4}^{0} (x+4)e^{-x}\,\mathrm{d}x$. En posant $f'(x) = e^{-x}$ et $g(x) = x+4$, donc $f(x) = -e^{-x}$ et $g'(x) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{0} (x+4)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-(x+4)e^{-x}\big]_{-4}^{0} - \int_{-4}^{0} -e^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-(x+4)e^{-x} - e^{-x}\big]_{-4}^{0} \\ &= -4\cdot 1 - 1 - (0 - e^4) = e^4 - 5 \cong 49,598 \end{aligned}$$

Exercice 5. *(16 points)*

a) Calculer l'intégrale suivante par partie : $\displaystyle\int_1^2 x\ln(2x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 x\ln(2x)\,\mathrm{d}x &= \left[\ln(2x)\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\ln(2x)\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(2x)\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2^2)\cdot 4 - \frac{1}{4}\cdot 4 - \left(\frac{1}{2}\ln(2)\cdot 1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= 4\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} = \frac{7}{2}\ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

b) Calculer l'intégrale suivante en appliquant un changement de variables : $\displaystyle\int_{-3/2}^{-1} x\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$.

On pose $t = \sqrt{2x+3}$, donc $\varphi(t) = x = \dfrac{t^2-3}{2}$ et $\varphi'(t) = \dfrac{2t}{2} = t$.

De plus, si $x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$, alors $t \in [0;1]$. On a donc

$$\int_{-3/2}^{-1} x\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t^2-3}{2}\cdot t\cdot t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{10} - \frac{t^3}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{2} - 0 = -\frac{2}{5}.$$

c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}\,\mathrm{d}x$ en appliquant le changement de variables $t = \sin(x)$.

On pose $t = \sin(x)$, donc $dt = \cos(x)dx$.

De plus, si $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. On a donc, en utilisant que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2(x)}{\sin^4(x)}\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{1-t^2}{t^4}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t}\right]_{1/2}^1 = -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{8}{3} + 2\right) = -1 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$$

Exercice 6. *(6 points)*

Etudier la convergence des intégrales suivantes (on demande uniquement si l'intégrale est convergente ou divergente) :

a) $\displaystyle\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x$

On fait le changement de variables $t = x - 2$, donc $x = \varphi(t) = t + 2$, $\varphi'(t) = 1$.

Ainsi, si $x \in [2;10]$, alors $t \in [0;8]$. On a donc

$$\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^8 \frac{1}{t^{2/3}}\,\mathrm{d}t$$

Par un critère de convergence, comme $\alpha = \frac{2}{3} < 1$, l'intégrale généralisée converge.

Remarque : On aurait pu faire directement le calcul, qui donne $\left[3t^{1/3}\right]_0^8 = 6$.

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x^3-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

On remarque que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{x^3+1} = 2 \neq 0$.

Ainsi, par un critère de divergence, on sait que cette intégrale généralisée diverge.

Remarque : on peut aussi faire le calcul de la primitive et vérifier qu'elle diverge (mais c'est plus long !) :