Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 10 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+)
Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $P \in \mathbb{C}^{m\times m}, D \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$, et $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que

$$A = PDQ$$

est une décomposition en valeurs singulières de A. Montrer que $A^* = Q^* D^T P^*$ est une décomposition en valeurs singulières de A^*.

Solution. *En correspondance avec la définition de la décomposition en valeurs singulières, il s'agit d'abord de montrer que Q^* et P^* sont unitaires. L'exercice 7 de la série 5 nous permet de vérifier cela simplement.*

De plus, A^* est réelle si et seulement si A est réelle. Dans ce cas, Q^* et P^* sont également réelles, ce qui conclut.

Exercice 2. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace de dimension 1 $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a\in M} \mathrm{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Solution. *Soit A la matrice dont les lignes sont les points de M, i.e.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par le Théorème 3.20 du cours, nous devons trouver une décomposition $A^T A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) U^T$, *et la colonne de* U *correspondant à la valeur propre la plus grande engendrera le sous-espace voulu. Ainsi, on diagonalise* $A^T A$:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 26 & -20 \\ -20 & 26 \end{pmatrix} \\ \det(A^T A - \lambda I) &= (26 - \lambda)^2 - 400 \\ &= (\lambda - 46)(\lambda - 6) \\ \Rightarrow \qquad A^T A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 & \\ & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc le sous-espace $H = \{t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *est le sous-espace voulu et la valeur* D *est*

$$D = \sum_{a \in M} \operatorname{dist}(a, H) = \sum_{a \in M} ||a||^2 - \frac{1}{2} \left(a^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^2 = 52 - 46 = 6.$$

Exercice 3.

1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i^T la i-ème ligne de Q. Montrer que
$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^T.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a
$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T.$$

3. Conclure que l'on peut représenter A comme
$$A = URV, \qquad\qquad U \in \mathbb{R}^{m \times r},\ R \in \mathbb{R}^{r \times r},\ V \in \mathbb{R}^{r \times d},$$
où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.

Solution.

1. *Soit* M_{ij} *la matrice telle que* $(M_{ij})_{ij} = 1$, *et* $(M_{ij})_{st} = 0$ *si* $(s,t) \neq (i,j)$. *Alors, on peut réécrire* $p_k q_k^T = \sum_i \sum_j p_{ik} q_{kj} M_{ij}$, *et donc*
$$\begin{aligned} \sum_k p_k q_k^T &= \sum_k \sum_i \sum_j p_{ik} q_{kj} M_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j \underbrace{\sum_k p_{ik} q_{kj}}_{(PQ)_{ij}} M_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j (PQ)_{ij} M_{ij} \\ &= PQ. \end{aligned}$$

2. *On définit $Q' = DQ$, c'est-à-dire que l'on multiplie les lignes de Q par les valeurs singulières : $q_i'^T = \sigma_i q_i^T$. Ainsi,*

$$A = PDQ = PQ' = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i'^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_i q_i^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T,$$

où la dernière égalité suit du fait que $\sigma_i = 0$ pour $i > r$.

3. *Dans la partie (2) on a vu qu'en fait il suffit de considérer les premières r colonnes de P et les premières r lignes de Q'. Il ne reste qu'à observer qu'on obtient les premières r lignes de Q', si l'on multiplie la sous-matrice des premières r lignes de Q par une matrice diagonale $r \times r$ avec les valeurs singulières sur la diagonale.*

Exercice 4. Montrer Lemme 5.3 du polycopié:
On considère le système suivant

$$\begin{array}{rcllll} \mathrm{x}_1'(t) & = & a_{11}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{1n}\mathrm{x}_n(t) \\ \mathrm{x}_2'(t) & = & a_{21}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{2n}\mathrm{x}_n(t) \\ & \vdots & & & \\ \mathrm{x}_n'(t) & = & a_{n1}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{nn}\mathrm{x}_n(t) \end{array} \tag{1}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{X} = \{\mathrm{x}\colon \mathrm{x} \text{ est une solution du système } (1)\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Solution. *Soient $\mathrm{x}, \mathrm{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ avec $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathscr{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de système (1). Car $\mathrm{x} \in \mathscr{X}$, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{x}(t) = A\mathrm{x}(t)$, et le même pour y. Donc,*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathrm{x} + \alpha\mathrm{y})(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{x}(t) + \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{y}(t) \\ &= A\mathrm{x}(t) + \alpha A\mathrm{y}(t) \\ &= A(\mathrm{x}(t) + \alpha\mathrm{y}(t)). \end{aligned}$$

Alors, $\mathscr{X}$ est complété sous addition et multiplication par un scalaire. Les autres propriétés resultant car $\mathscr{X}$ est une sous-ensemble de l'espace des fonctions differentielles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Solution. *Par définition, on a*

$$e^{tA} = I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= 0 + A + \frac{1}{2!}2tA^2 + \frac{1}{3!}3t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}nt^{n-1}A^n + \cdots \\ &= 0 + A + \frac{1}{1!}tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n + \cdots \\ &= A(I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots) \\ &= Ae^{At}.\end{aligned}$$

On peut aussi voir que:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^j}{j!}) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{jt^{j-1}A^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j-1}A^j}{(j-1)!} = A\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j-1}A^{j-1}}{(j-1)!} = A\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^j}{(j)!} = Ae^{At}.$$

Exercice 6. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^BP$.

Solution. *Par définition,*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k.$$

Or, comme $PP^{-1} = I$, *on a*

$$A^k = (P^{-1}BP)^k = \underbrace{P^{-1}BPP^{-1}BP\cdots P^{-1}BP}_{k\ fois} = P^{-1}B^kP,$$

donc

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}P^{-1}B^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B^k\right)P = P^{-1}e^BP$$

où on peut échanger l'ordre de multiplication et d'addition car la somme converge.

Exercice 7. Montrer que $e^{A+B} = e^Ae^B$ si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ commutent.

Solution.

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{k!m!}A^kB^m = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}B^m = e^Ae^B.$$

Exercice 8. (*) (examen 2016)

Soient $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Pour $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$, on considère la droite $L_{z,v}$ définie par

$$L_{z,v} = \{z + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = z + \operatorname{span}\{v\}.$$

Soit $d(a_i, L_{z,v})$ la distance de a_i à $L_{z,v}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

(i) Supposons que $\sum_{i=1}^m a_i = 0$. Montrer que $\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \geq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{0,v})^2$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Conclure que, étant donnés des points $a_i, \ldots, a_m$, on peut trouver un $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$ tels que

$$\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \leq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z',v'})^2,$$

pour tout $z' \in \mathbb{R}^n$ et $v' \in S^{n-1}$. En particulier :

(a) Donner une formule pour z.

(b) Décrire la matrice A telle qu'un vecteur propre normalisé de $A^T A$ associé à la valeur propre la plus grande est une solution pour v.

Solution. *En classe.*