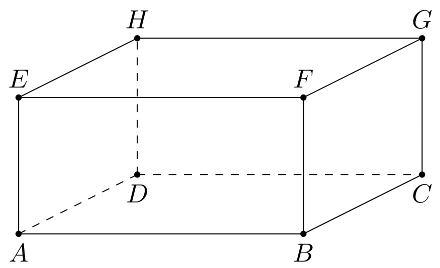
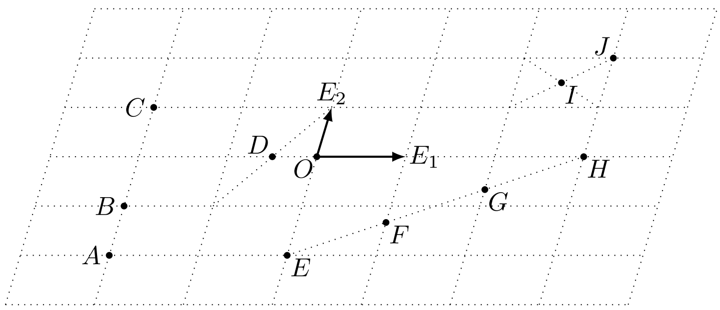
Série 31

Exercice 1. On considère le parallélépipède suivant de sommets A, B, C, D, E, F, G, H.



On construit le milieu M du segment $[DH]$ et le milieu N du segment $[AB]$.
Montre que les vecteurs $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont coplanaires.

Exercice 2. Coordonnées. Détermine les coordonnées des points $A, B, \ldots, J$ dans le repère formé par l'origine O et la base $(\overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2})$:



Exercice 3. Soient $A = (a_1; a_2)$, $B = (b_1; b_2)$ et $C = (c_1; c_2)$ trois points de $\mathbb{R}^2$. Démontre que le centre de gravité G du triangle ΔABC est $G = \left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

Exercice 4. On considère les points $A = (5; 1)$, $B = (-1; 3)$ et $C = (1; -6)$. Calcule les coordonnées du centre de gravité G du triangle ΔABC et contrôle ta solution graphiquement en construisant G à la règle et au compas (sur du papier quadrillé par exemple).

Exercice 5. On considère les points $A = (6; -1)$, $B = (-2; 6)$ et $G = (3; 4)$. Calcule les coordonnées du troisième sommet du triangle ΔABC dont le centre de gravité est G.

Exercice 6. On considère les points $A = (0; 2; 4)$, $B = (1; -1; 3)$, $C = (-8; 2; 1)$ et $D = (-6; -4; -1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Montre que ces points sont coplanaires.

Exercice 7. Le centre de gravité d'une pyramide de base quelconque se trouve au quart de la longueur du segment qui joint le sommet au centre de gravité de la base. Calcule les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre de sommets $(0; 0; 0)$, $(3; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$ et $(0; 0; 3)$.

Indication. Choisis astucieusement la base du tétraèdre pour éviter trop de calculs !

Exercice 8. Montre que les points $(0; 11; 7)$, $(20; 10; 0)$, $(15; 23; 16)$ et $(15; 2; 19)$ sont les sommets d'un tétraèdre régulier.

Exercice 9. On se donne les points $R = (8; -15)$, $S = (13, -3)$, $T = (5; 12)$ et $U = (-4; 15/2)$.

a) Si M est le milieu de $[ST]$, le quadrilatère $OSMU$ est-il un parallélogramme ? Justifie ta réponse vectoriellement !

b) Quelle est la nature du quadrilatère $RSTU$?

Exercice 10. Démontre que

a) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$;

b) $(a\vec{u}) \bullet \vec{v} = a(\vec{u} \bullet \vec{v})$;

c) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$;

d) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$.

pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de V_n et tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. On considère dans le repère canonique du plan le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Donne l'équation de la droite passant par l'origine de vecteur directeur $\vec{u}$ et celle de la droite perpendiculaire et passant par l'origine. Quelles sont les pentes de ces droites ?

Exercice 12. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

a) Le produit scalaire de deux vecteurs est toujours positif ou nul.

b) Deux repères différents ont toujours des origines distinctes.

c) **Inégalité de Cauchy-Schwartz.** On a toujours $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

d) Si $\vec{u}$ est le vecteur nul, alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

e) Si $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$, alors $\vec{u}$ est le vecteur nul.

f) Pour tout nombre réel λ et entier $n \geq 1$, il existe un vecteur de V_n de norme λ.

g) Pour tout nombre irrationnel $\lambda > 10$ et entier $n \geq 1$, il existe un vecteur de V_n de norme λ.

Exercice 13. Calcule les angles entre les vecteurs suivants du plan :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Calcule les angles entre les vecteurs suivants de l'espace :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$.