

Exercice 1. Un vecteur non-nul $\vec{v} = (a_1)$ de V_1 est linéairement indépendant (si $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$, alors $\lambda = 0$ car $a_1 \neq 0$) et engendre n'importe quel autre vecteur de \mathbb{R} (pour $\vec{w} = (b_1)$, on a $\frac{b_1}{a_1} \cdot \vec{v} = \vec{w}$). Ainsi l'ensemble des bases de V_1 est $V_1 \setminus \{0\}$. La raison pour laquelle on exclut 0 est qu'il est impossible de générer un vecteur quelconque avec un multiple de 0.

Exercice 2.

a) Non, car par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des deux vecteurs donnés. En effet,

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ n'a pas de solution.}$$

b) Oui, soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de V_2 , alors l'équation vectorielle $x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet comme solution $x = \frac{3a - 2b}{2}$, $y = -\frac{5a - 4b}{4}$, ce qui prouve que le vecteur quelconque $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux vecteurs donnés.

c) Non car une combinaison linéaire de ces deux vecteurs formera toujours un vecteur de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$.

d) Oui, soit un vecteur quelconque $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ de V_4 , alors l'équation vectorielle

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

admet comme solution :

$$x = \frac{-d + 3c + b + a}{4}, \quad y = -\frac{-d - c - 3b + a}{4}, \quad z = -\frac{-d - c + b + a}{4}, \quad t = \frac{d - c - b + a}{2},$$

ce qui prouve que le vecteur quelconque \vec{v} peut s'exprimer comme combinaison linéaire des cinq vecteurs donnés. (On n'a pas pris en compte le quatrième vecteur qui est la somme des deux premiers.)

Exercice 3.

a) Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants car l'un n'est pas multiple de l'autre, ils forment donc une base de V_2 en vertu d'une proposition du cours.

b) Comme $-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ces deux vecteurs sont donc colinéaires et ne peuvent donc pas former une base de V_2 .

c) On a $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce calcul nous montre que les trois vecteurs sont linéairement dépendants, ils sont donc coplanaires et ne peuvent ainsi pas former une base de V_3 .

d) Par le même raisonnement on a $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, ainsi $5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc ces vecteurs ne forment pas une base de V_3 .

e) Non car $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) Oui car ces trois vecteurs sont linéairement indépendants et donc par une proposition du cours, ils forment une base de V_3 . Pour voir qu'ils sont linéairement indépendants, résous l'équation vectorielle $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ on obtient bien } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Exercice 4. On observe que $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ce calcul montre que le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartient au plan formé par $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ puisqu'il s'exprime comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs. Ainsi ces trois vecteurs sont coplanaires.

Exercice 5.

- a) Faux, car une base de V_3 contient toujours trois vecteurs, tandis que dans V_2 trois vecteurs sont toujours linéairement dépendants.
- b) Vrai, car par hypothèse (\vec{u}, \vec{v}) forment une base de V_2 , ils forment donc en particulier un système de générateurs et donc tout vecteur de V_2 peut s'exprimer comme combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} . Ainsi ajouter un (ou plusieurs) vecteur(s) à la liste ne change pas le fait que c'est un système de générateurs (par contre \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont forcément linéairement dépendants).
- c) Vrai, car le vecteur $\vec{0}$ est toujours linéairement dépendant de tout autre vecteur, il ne peut donc pas faire partie d'une base.
- d) Faux, si $\vec{w} = \vec{0}$ alors il n'existe aucun vecteur de V_2 qui ne soit pas colinéaire à \vec{w} et donc aucune base ne le contenant.
- e) Vrai, en effet soit $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors par exemple, le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est tel que (\vec{v}, \vec{w}) forme une base de V_2 .
- f) Faux, si $\vec{w} = \vec{0}$ alors il n'existe aucun vecteur de V_3 qui ne soit pas colinéaire à \vec{w} et donc aucune base ne le contenant.
- g) Vrai, en effet on peut toujours choisir un autre vecteur \vec{v} de V_3 qui ne soit pas colinéaire à \vec{w} et un troisième vecteur \vec{u} non coplanaire au plan formé par (\vec{w}, \vec{v}) , par exemple en prenant \vec{u} normal à ce plan.