EPFL

Ens: Prof. Friedrich Eisenbrand
Algèbre Linéaire Avancée II - (n/a)
29 juin 2021
180 minutes

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, et soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ ses valeurs singulières. Alors on a que:

- ☐ $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ sont les valeurs propres positives de $A^T A$.
- ☐ $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ sont les valeurs propres positives de $A\overline{A}^T$.
- ☐ $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ sont les valeurs propres positives de AA^T.
- ☐ Aucune des réponses n'est correcte.

Question 2 : Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A^3 = A$. Alors on a que:

- ☐ $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!}$.
- ☐ $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} + A^2$.
- ☐ $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} - A^2$.
- ☐ Aucune des réponses n'est correcte.

Question 3 : Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

- ☐ $x^6 - 8x^5 + 13x^4 + 5x^3 - 25x^2 + 30x - 8$.
- ☐ $x^6 - 8x^5 + 17x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 16x - 8$.
- ☐ $x^6 - 8x^5 + x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 16$.
- ☐ $x^6 - 8$.

Question 4 : Soit $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ une matrice avec polynôme caractéristique

$$p_A(x) = (x-1)^5(x+1)^2(x-2)$$

et polynôme minimal

$$m_A(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2).$$

Soit J une forme normale de Jordan de A.
Alors

- ☐ J a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.
- ☐ Aucune des réponses n'est correcte.
- ☐ J a au plus 6 blocs de Jordan.
- ☐ J a un seul bloc de Jordan pour la valeur propre -1.

Question 5 :
Laquelle des applications suivantes $f : \mathbb{Z}_5^3 \times \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5$ n'est pas une forme bilinéaire ?

- ☐ $f(x, y) = 7x_1y_2 + 5x_2 + 4y_3$.
- ☐ $f(x, y) = 12x_1y_2 + 2x_2y_3^5$.
- ☐ $f(x, y) = 0$.
- ☐ $f(x, y) = 12x_1y_2 + 4x_3y_3$.

Question 6 : Trouver la solution du système suivant :

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 4x_2 \\ x_2' &= -4x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

sujet aux conditions initiales $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = -1$.

- ☐ $x_1(t) = e^{3t}(\cos(4t) - 2\sin(4t)), x_2(t) = e^{3t}(-2\cos(4t) - \sin(4t))$.
- ☐ $x_1(t) = e^{4t}(2\cos(3t) - \sin(3t)), x_2(t) = e^{4t}(-\cos(3t) - 2\sin(3t))$.
- ☐ $x_1(t) = e^{3t}(2\cos(4t) - \sin(4t)), x_2(t) = e^{3t}(-\cos(4t) - 2\sin(4t))$.
- ☐ Aucune des réponses n'est correcte.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 7 : Il existe un polynôme $d(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de degré au moins 1 qui divise $f(x) = 3\,x^4 + 8\,x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ et $g(x) = 2\,x^4 + 6\,x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 : Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $A^5 = A$. Alors A est diagonalisable.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 : Soit A une matrice nilpotente, si bien que $A^k = 0$ pour un certain entier $k > 0$. Alors, dans une solution $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel $x' = Ax$, chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t de degré au plus k.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ avec valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et soit $m_A(x) = \Pi_{i=1}^{k}(\lambda_i - x)^{m_i}$ son polynôme minimal. Le nombre de blocs de Jordan associé à une valeur propre λ_i est égal à l'exposant m_i de $(\lambda_i - x)$ dans $m_A(x)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et définie positive. Alors A^{-1} est une matrice définie positive.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 :
Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et soit $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ la forme bilinéaire standard sur $\mathbb{Q}^n$. Chaque sous-espace de $\mathbb{Q}^n$ possède une base orthogonale $\{b_1, \dots, b_n\}$ t.q. $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, $i = 1, \dots, n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice singulière. La matrice e^A est non-singulière.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 :
Soit $(G, +)$ un groupe abélien engendré par g_1, g_2, g_3, g_4. Soit $\phi : \mathbb{Z}^4 \to G$ défini comme:

$$\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3 + x_4 g_4$$

et soit $\ker(\phi) = \{Ay : y \in \mathbb{Z}^2\}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. Alors $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 15 : Soient $B = (b_1, \ldots, b_n)$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ une base de l'espace euclidien V et $B^\star = (b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ la base orthogonale résultant du procédé de Gram-Schmidt sur B, et soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Soit un vecteur $p \in V$ où $p = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i^\star$, avec $\alpha_i, \beta_i \in K$. Si $\alpha_k \neq 0$ alors $\beta_k \neq 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice diagonalisable. Alors il existe une matrice unitaire U telle que $UAU^* = D$ où D est une matrice diagonale avec les valeurs propres de A sur la diagonale.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 : Soit K un corps et $A, B \in K^{n \times n}$ inversibles. Les valeurs propres de AB et celles de BA sont les mêmes.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soit K un corps et $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. Si $f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes racines (avec multiplicité), alors $f(x) = ag(x)$, $a \in K \setminus \{0\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A et B sont diagonalisables et elles ont le même spectre, alors elles sont semblables.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit V un espace euclidien et soient $v_1, \ldots, v_n \in V$ des vecteurs deux à deux orthogonaux. Soit $v \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ et soient $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \|v\|^2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit R un anneau, et soit $R^{n\times n}$ l'anneau des matrices $n \times n$ sur R. Le centre de $R^{n\times n}$ est $Z(R^{n\times n}) = \{aI_n : a \in Z(R)\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 23: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5
☐.5 ☐6 ☐.5 ☐7 ☐.5 ☐8 ☐.5 ☐9 ☐.5 ☐10 *Réservé au correcteur*

Soient K un corps, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ les valeurs propres d'une matrice $A \in K^{n\times n}$ et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités algébriques. Soit $n = m_1 + \cdots + m_r$. Soit $p_A(x)$ le polynôme caractéristique de A, c-à-d $p_A(x) = \det(A - xI_n)$.

Définition: La *trace* de A est définie par $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Démontrer les assertions suivantes:

i) $\det(A) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_i}$

ii) Si $p_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, montrer que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$.

iii) $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i\lambda_i$

Question 24: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5
☐.5 ☐6 ☐.5 ☐7 ☐.5 ☐8 ☐.5 ☐9 ☐.5 ☐10

Réservé au correcteur

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Le rayon spectral ρ est défini comme $\rho = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \,\text{valeur propre de}\, A\}$. On considère la suite A^n, $n \in \mathbb{N}$.
Montrer les assertions suivantes :

(a) Si $\rho \geq 1$, alors A^n ne converge pas vers la matrice 0.

(b) Soit $B = \lambda I + N$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice nilpotente. Si $|\lambda| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$.

(c) La suite A^n converge vers 0 si et seulement si $\rho < 1$.

Question 25: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5 ☐.5 ☐6 ☐.5 ☐7 ☐.5 ☐8 ☐.5 ☐9 ☐.5 ☐10 *Réservé au correcteur*

Dans cet exercice, on considère le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$.

(a) Soit $H \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$. Soit $l \in H$ t.q. $\langle v - l, h \rangle = 0$ pour tout $h \in H$. Montrer que

$$\|v - l\| \leq \|v\|.$$

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de rang plein et soit $A = A^* R$ une factorisation selon la méthode de Gram-Schmidt (colonnes de $A^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux-à-deux orthogonaux et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangulaire supérieure avec que de 1 sur la diagonale). Montrer que

$$\det(A^T A) = \prod_{i=1}^{n} \|a_i^*\|^2,$$

où a_i^* est la i-ème colonne de la matrice A^*.

(c) Montrer que $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|$, où a_i est la i-ème colonne de la matrice A.