



Ens. : Friedrich Eisenbrand
Algèbre Linéaire Avancée II - MA
29.06.2022
Durée : 180 minutes













n / a

n / a

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Remarque : Tout le long de l'examen, K dénote un corps.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix}$. Un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ minimisant $\|Ax - b\|_2$ est

- Aucune des autres réponses n'est correcte.
- $x = (-\frac{8}{11}, 5)$
- $x = (-\frac{7}{22}, 6)$
- $x = (5, \frac{8}{11})$
- $x = (\frac{45}{7}, -\frac{4}{7})$

Question 2 Trouver la solution du système suivant :

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 + 6x_2 \\x_2' &= -6x_1 + 2x_2\end{aligned}$$

sujet aux conditions initiales $x_1(0) = 3$ et $x_2(0) = -4$.

- $x_1(t) = e^{3t}(2 \cos(6t) - 4 \sin(6t)), x_2(t) = e^{3t}(-4 \cos(6t) - 2 \sin(6t)).$
- $x_1(t) = e^{2t}(3 \cos(6t) - 4 \sin(6t)), x_2(t) = e^{2t}(-4 \cos(6t) - 3 \sin(6t)).$
- $x_1(t) = e^{4t}(6 \cos(2t) - 4 \sin(2t)), x_2(t) = e^{4t}(-4 \cos(2t) - 6 \sin(2t)).$
- Aucune des autres réponses n'est correcte.
- $x_1(t) = e^{2t}(5 \cos(2t) - 4 \sin(2t)), x_2(t) = e^{2t}(-4 \cos(2t) - 5 \sin(2t)).$

Question 3 Quel est le polynôme caractéristique $\det(A - xI)$ de la matrice $A \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $x^5 + 8x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 8x + 8$
- $-x^5 + 6x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 8x + 8$
- $-x^5 + 8x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 8x + 10$
- Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 4 Soit $A \in K^{n \times n}$ une matrice, $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de vecteurs propres de A , et $P = (v_1 \cdots v_n) \in K^{n \times n}$.

Alors

- PAP^T est une matrice diagonale.
- $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
- P^TAP est une matrice diagonale.
- Aucune des autres réponses n'est correcte.
- PAP^{-1} est une matrice diagonale.



Question 5 Soit $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ dont le polynôme caractéristique est $p_A(x) = -(x-1)^2(x-3)^3$. Les dimensions de l'image de $(A - \lambda I)$ sont 3 pour $\lambda = 1$, et 4 pour $\lambda = 3$. La forme normale de Jordan de A est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aucune des autres réponses n'est correcte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 6 Soit $f : \mathbb{Z}_2^5 \times \mathbb{Z}_2^5 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ une forme bilinéaire définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit l'espace W engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la dimension de W^\perp ?

1.

2.

3.

Aucune des autres réponses n'est correcte.



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 7 Soient V un espace euclidien, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble libre et $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ le résultat du procédé de Gram-Schmidt appliqué à $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. En plus, soit $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ le résultat du procédé de Gram-Schmidt appliqué à $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \dots, v_n\}$ (les éléments i et $i+1$ sont échangés). Alors $u_j = u'_j$ pour tout $j \neq \{i, i+1\}$.

VRAI FAUX

Question 8 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n^2-n+1) & (n^2-n+2) & \dots & n^2 \end{pmatrix}$ est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$.

VRAI FAUX

Question 9 Les valeurs propres d'une matrice $A \in K^{n \times n}$ nilpotente sont toutes nulles.

VRAI FAUX

Question 10 Soit $A = PDQ$ une décomposition en valeurs singulières de A . Alors $Q^T D^T P^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A^T .

VRAI FAUX

Question 11 Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible. Si toutes les valeurs propres de A sont négatives, alors toutes les valeurs propres de A^{-1} sont négatives.

VRAI FAUX

Question 12 Pour chaque matrice $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax = 0\}$ admet un élément non nul si et seulement si $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ admet un élément non nul.

VRAI FAUX

Question 13 Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que les k premières valeurs singulières sont strictement positives. Alors il existe une *unique* solution au problème

$$\min_{\substack{B \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \text{rang}(B) = k}} \|A - B\|_F.$$

VRAI FAUX



Question 14 Soit $f : K^n \times K^n \rightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. Il existe une base de K^n orthogonale par rapport à f .

VRAI FAUX

Question 15 Pour toute paire de matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on a $\text{rang}(AB) \geq \text{rang}(A) + \text{rang}(B) - n$.

VRAI FAUX

Question 16 Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices symétriques dont les indices de positivité, négativité, nullité, sont les mêmes. Alors A et B sont congruentes.

VRAI FAUX

Question 17 Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisable. Alors A est hermitienne.

VRAI FAUX

Question 18 Soit une forme bilinéaire symétrique $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive. Alors $f(x, y) \geq 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

VRAI FAUX

Question 19 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ est en forme normale d'Hermite.

VRAI FAUX

Question 20 Pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que B est orthogonale, on a $\det(AB) = \det(A)$.

VRAI FAUX

Question 21 Soit $N \in K^{n \times n}$ une matrice nilpotente non nulle. Il existe une base $\{b_1, \dots, b_n\}$ de K^n telle que $Nb_1 = b_2$.

VRAI FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 22: Cette question est notée sur 10 points.



Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices semblables sur \mathbb{C} .

(a) Montrer que A et B sont semblables sur \mathbb{R} .

Indice : partitionnez $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en $P = P_1 + iP_2$ où $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et considérez la fonction $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$.

(b) En déduire, à partir de l'unicité de la forme de Jordan (à permutation des blocs près), que deux matrices sont semblables sur \mathbb{R} si et seulement s'ils admettent la même forme normale de Jordan.





PROJET



PROJET

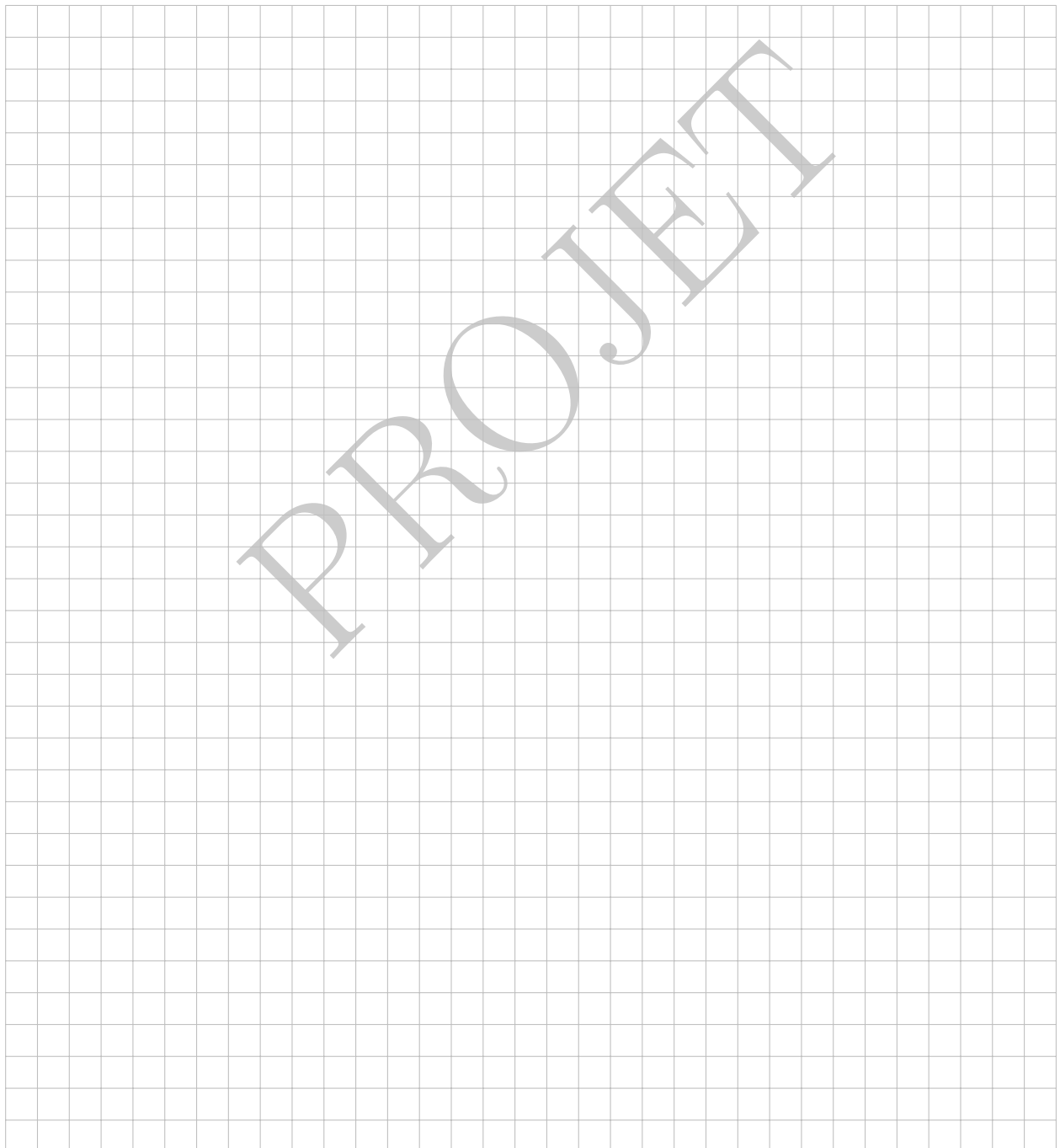


Question 23: *Cette question est notée sur 10 points.*

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

Soient E, F deux corps tels que $F \subset E$.

- (a) Montrer que E est un espace vectoriel sur F avec multiplication externe $e \cdot f$, $e \in E$, $f \in F$ étant la multiplication sur E en vérifiant (1) Associativité, (2) Distributivité et (3) Neutralité de $1_E = 1_F$.
Indice: Ici on teste la connaissance de la définition d'un espace vectoriel!
- (b) Maintenant soit E vu comme espace vectoriel sur F de dimension finie, et soit $e \in E$, $e \neq 0$. Montrer qu'il existe un polynôme $f(x) \in F[x]$, $f(x) \neq 0$ tel que $f(e) = 0$.
- (c) Montrer qu'il y a un seul tel polynôme $p_e(x) \neq 0$ de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.
- (d) Montrer que ce polynôme $p_e(x)$ est irréductible.





PROJET



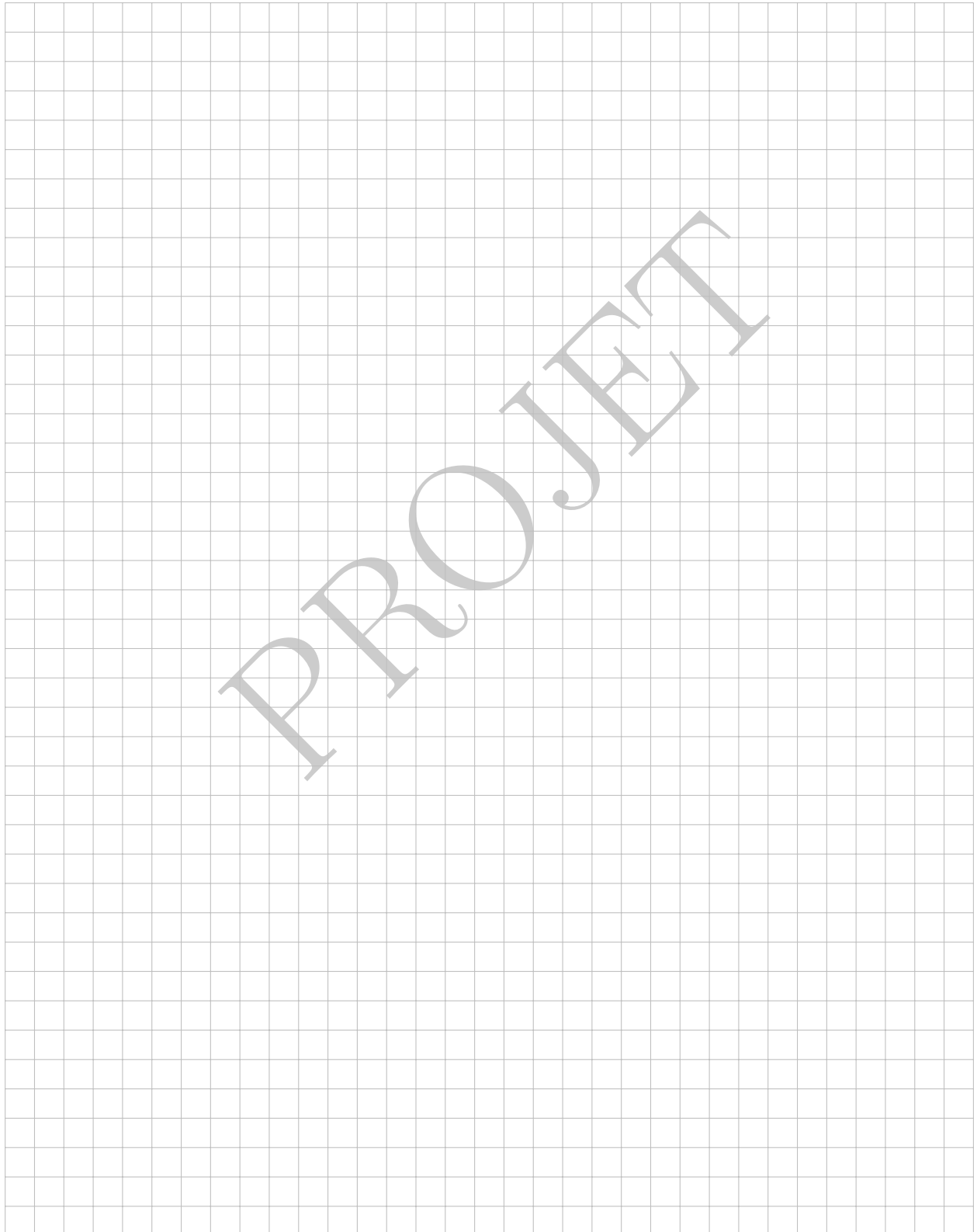
PROJET



Question 24: *Cette question est notée sur 10 points.*

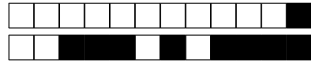
<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9	<input checked="" type="checkbox"/>	10
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	-------------------------------------	----

Soit $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ une matrice symétrique, unimodulaire, et définie positive. Montrer qu'il existe une matrice unimodulaire U telle que $G = U^T U$.

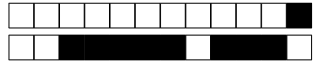




PROJET



PROJET



PROJET



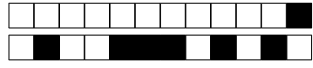
PROJET



PROJET



PROJET



PROJET



PROJET