Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 11

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) (+) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Trouver l'inverse de e^A.

Exercice 3. Question ouverte 2022.

Considérons l'équation différentielle de second ordre où $\lambda > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = \alpha \text{ et } u'(0) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

1. Reformuler le problème en une équation en dimension 2 de la forme $x' = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$;

2. Calculer e^{At} et en déduire la solution u du problème initial (1).

Formules : $cos(x) = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $sin(x) = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, et J sa forme normale de Jordan.

Montrer que les valeurs propres de e^J sont de la forme e^λ, où λ est une valeur propre de J. Montrer que les multiplicités algébriques de e^λ et λ sont égales et en déduire que

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à cette matrice A. Trouver des sous-espaces $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ qui satisfont les conditions du Lemme 5.20, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i \colon V_i \to V_i$ est nilpotente, pour $i = 1, 2$.

Exercice 6. Soit $T \colon V \to V$ un endomorphisme et soit $V_1, ..., V_k$ une décomposition de V telle que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \to V_i$ est nilpotente et les valeurs $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ sont distinctes. Montrez que :

a) $V_i = \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ pour un entier a_i tel que $N_i^{a_i} = 0$. (*Indice pour l'inclusion* $\supseteq$: les polynômes $(x - \lambda_i)^{a_i}$ et $(x - \lambda_j)^{a_j}$ sont premiers entre eux lorsque $i \neq j$).

b) Les $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres de T.

c) Le polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{a_i}$ annule T. (*Indice* : montrer que $f(T)(v) = 0$ pour tout $v \in V$ en utilisant la décomposition de V et le premier point).

d) En déduire que l'ensemble $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T (*Indice* : si $v \neq 0$ est un vecteur propre de T de valeur propre λ, exprimer $f(T)(v)$ en fonction de f, λ, et v).

e) Conclure que les valeurs sur la diagonale de n'importe quelle forme normale de Jordan de T constituent l'ensemble des valeurs propres de T.

Exercice 7. Soit $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice formée par des blocs de Jordan ayant chacun la même valeur λ sur la diagonale. Montrer que

a) Le polynôme caractéristique de M est $p_M(t) = (\lambda - t)^n$.

b) Le polynôme minimal de J est $m_J(t) = (t - \lambda)^k$, où k est la taille du plus gros bloc de Jordan.

En déduire, à l'aide de l'exercice précédent, que le polynôme minimal d'une matrice générale est $\prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{k_i}$, si et seulement si la taille du plus gros bloc de Jordan associé à la valeur λ_i est k_i pour tout $i = 1, \dots, r$.

Exercice 8. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient J une forme normale de Jordan de A, P la matrice de passage associée ($A = PJP^{-1}$).

1. Soient $B_1, ..., B_k$ l'ensemble des blocs de J associés à une même valeur propre λ. Montrer que $\dim \operatorname{Im}(J - \lambda I) = n - k$.
2. En déduire que le nombre de blocs de J associés à une valeur propre λ est égal à sa multiplicité géométrique $\dim \ker(A - \lambda I)$.
3. Montrer que si A est diagonalisable, chaque bloc de Jordan est de taille 1 et la décomposition $A = PJP^{-1}$ est exactement sa diagonalisation.