Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 11 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) (+) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Solution.

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ *où* $x, y \in \mathbb{C}$. *Pour chaque nombre entier* $k \geq 0$, *on a* $(tA)^k = \begin{pmatrix} (tx)^k & 0 \\ 0 & (ty)^k \end{pmatrix}$. *Donc, on peut calculer* e^{tA} *comme*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (tx)^k & 0 \\ 0 & (ty)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ty)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tx} & 0 \\ 0 & e^{ty} \end{pmatrix}.$$

b) Si $A^2 = A$ *alors* $(tA)^k = t^k A$ *pour tout nombre entier* $k \geq 1$, *donc*

$$e^{tA} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A = I + (e^t - 1)A.$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Trouver l'inverse de e^A.

Solution. *Les matrices* A *et* $-A$ *commutent (même si* A *est singulière), ainsi pour toute matrice* A *on a*

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I.$$

Donc la matrice e^A *est toujours inversible et* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Exercice 3. Question ouverte 2022.

Considérons l'équation différentielle de second ordre où $\lambda > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = \alpha \text{ et } u'(0) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

1. Reformuler le problème en une équation en dimension 2 de la forme $x' = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$;
2. Calculer e^{At} et en déduire la solution u du problème initial (1).

Formules : $cos(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $sin(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Solution. *Question 1.*

On pose $x(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$. *Alors, clairement,* $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. *De surcroît,* $x'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} x(t) = Ax(t)$, *où on définit* $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Question 2.

On sait d'après le cours que l'unique solution du système est $x(t) = e^{tA}x(0)$. *Il s'agit donc de calculer* $e^{tA} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k$, *et donc les puissances de la matrice* A.

Remarquons d'abord que $A^2 = -\lambda I$. *Par suite, on a*

$$A^{2k} = (-\lambda)^k I, \qquad A^{2k+1} = (-\lambda)^k A.$$

Ceci nous pousse à scinder la somme en indices pairs et impairs. Les indices pairs donnent

$$\sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(\sqrt{\lambda} t)^{2k}}{(2k)!} I = \cos(\sqrt{\lambda} t) I.$$

Parallèlement, les indices impairs donnent

$$\sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(\sqrt{\lambda} t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} t A.$$

Par conséquent, on a $e^{tA} = \cos(\sqrt{\lambda} t) I + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} t A = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t & \cos(\sqrt{\lambda} t) \end{pmatrix}$.

Finalement, les relations $x(t) = e^{tA}x(0)$ *et* $u = x_1$ *concluent :*

$$u(t) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda} t) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t).$$

On contrôlera que u *vérifie bien l'équation différentielle ainsi que les conditions initiales.*

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, et J sa forme normale de Jordan.

Montrer que les valeurs propres de e^J sont de la forme e^λ, où λ est une valeur propre de J. Montrer que les multiplicités algébriques de e^λ et λ sont égales et en déduire que

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

Solution. *Les polynômes caractéristiques de A et de J sont identiques, donc le nombre d'apparitions d'une valeur propre λ sur la diagonale de J est égal à sa multiplicité algébrique. Pour chaque bloc de Jordan B associé à une valeur propre λ, la matrice B^k est triangulaire supérieure avec λ^k sur sa diagonale. Par suite, l'exponentielle e^B est triangulaire supérieure avec e^λ sur sa diagonale.*

J est bloc-diagonale et son exponentielle est également bloc-diagonale avec pour blocs les exponentielles des blocs de J. Par conséquent, e^J est triangulaire supérieure avec e^λ sur sa diagonale.

Notons que le nombre de e^λ dans la diagonale de e^J est égal au nombre de λ dans la diagonale de J. C'est pourquoi la multiplicité algébrique de e^λ comme valeur propre de e^J est égale à cette de λ comme valeur propre de J.

La conclusion découle du fait que le déterminant est le produit des valeurs propres et la trace est la somme des valeurs propres.

$$\det(e^A) = \det(e^J) = \prod_\lambda e^\lambda = e^{\sum_\lambda \lambda} = e^{Tr(A)}.$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à cette matrice A. Trouver des sous-espaces $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ qui satisfont les conditions du Lemme 5.20, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i \colon V_i \to V_i$ est nilpotente, pour $i = 1, 2$.

Solution. *On va suivre la démonstration du Lemme 5.20 pour trouver ces sous-espaces. On cherche d'abord les valeur propres de la matrice A. On voit que $p_A(x) = (x+2)^2(x-2)$. On calcule alors les espaces des vecteurs propres pour -2 et pour 2. On a que* $\ker(A-2I) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ *et* $\ker(A+2I) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
On remarquant que $\dim(\ker(A+2I)) = 1 < m_a(-2) = 2$ *on voit que la matrice A n'est pas diagonalisable. On calcule alors* $\ker((A+2I)^2) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
On va maintenant voir que $V_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ *et* $V_2 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ *sont des sous-espaces qui satisfont toutes les conditions du Lemme 5.20.*

$T(V_2) \subseteq V_2$ est facile à voir, vu que V_2 est engendré par un vecteur propre. Pour voir que $T(V_1) \subseteq V_1$ on prend un vecteur $v = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a+b \end{pmatrix} \in V_1$, *pour $a, b \in \mathbb{R}$ et*

on regarde l'image $T(v)$. $T(v) = \begin{pmatrix} -2a+b \\ 2a-b \\ 2a-3b \end{pmatrix}$ *qui est clairement encore un vecteur de* V_1 *car il peut être écrit comme* $(-2a+b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Encore une fois, vu que V_2 *est composé d'un vecteur propre, il est facile de voir que* $T_{|V_2} = N_2 + 2I$, *où* $N_2 = 0$.

Pour V_1 *on peut voir que* $T_{|V_1} = (T+2I)_{|V_1} - (2I)_{|V_1}$. *Maintenant on veut voir que* $N_1 = (T+2I)_{|V_1}$ *est nilpotente. On peut utilise la définition de* V_1*: en fait, comme* $V_1 = \ker((A+2I)^2)$ *on sait que* $(N_1)^2_{|V_1} = 0$. *On peut aussi vérifier cette condition directement:*

$$(A+2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 0 \\ -16 & -16 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow (A+2I)^2 \begin{pmatrix} -a \\ a \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il reste finalement à voir que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$. *Pour cela, il suffit de montrer que les vecteurs sont indépendants, ce qu'on peut faire facilement en vérifiant que* $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$ *et que* $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ *en résolvant le système*

$$\begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -c \end{pmatrix},$$

dont la seule solution possible est $a = b = c = 0$.

Exercice 6. Soit $T\colon V \to V$ un endomorphisme et soit $V_1, ..., V_k$ une décomposition de V telle que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \to V_i$ est nilpotente et les valeurs $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ sont distinctes. Montrez que :

a) $V_i = \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ pour un entier a_i tel que $N_i^{a_i} = 0$. (*Indice pour l'inclusion* $\supseteq$: les polynômes $(x-\lambda_i)^{a_i}$ et $(x-\lambda_j)^{a_j}$ sont premiers entre eux lorsque $i \neq j$).

b) Les $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres de T.

c) Le polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^k (x-\lambda_i)^{a_i}$ annule T. (*Indice* : montrer que $f(T)(v) = 0$ pour tout $v \in V$ en utilisant la décomposition de V et le premier point).

d) En déduire que l'ensemble $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T (*Indice* : si $v \neq 0$ est un vecteur propre de T de valeur propre λ, exprimer $f(T)(v)$ en fonction de f, λ, et v).

e) Conclure que les valeurs sur la diagonale de n'importe quelle forme normale de Jordan de T constituent l'ensemble des valeurs propres de T.

Solution.

a) *Pour un i fixé, soit $v \in V_i$ et a_i le plus petit entier tel que $N_i^{a_i} = 0$. Comme $T_{|V_i}(u) = T(u)$ $\forall u \in V_i$ et $T(V_i) \subseteq V_i$, on a*

$$\begin{aligned}(T - \lambda_i I)^{a_i}(v) &= (T_{|V_i} - \lambda_i I)^{a_i}(v)\\ &= (N_i + \lambda_i I - \lambda_i I)^{a_i}(v)\\ &= N_i^{a_i}(v)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Il suit que $V_i \subseteq \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$.

Pour un $v \in \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$, et par hypothèse, il existe $v_1, \dots, v_k$ dans $V_1, \dots, V_k$ tels que

$$v = \sum_{j=1}^{k} v_j.$$

Comme T et I laissent V_j invariant pour tout j, on a nécessairement

$$(T - \lambda_i I)^{a_i} v_j \in V_j$$

pour tout j. Dès lors, l'égalité $(T - \lambda_i I)^{a_i} v = 0$ implique que

$$(T - \lambda_i I)^{a_i} v_j = 0$$

pour tout j.

Or l'inclusion déjà démontrée spécifie que $V_j \subseteq \ker(T - \lambda_j I)^{a_j}$, c'est-à-dire

$$(T - \lambda_j I)^{a_j} v_j = 0$$

Cependant, les polynômes $(x - \lambda_i)^{a_i}$ et $(x - \lambda_j)^{a_j}$ sont premiers entre eux et donc leurs noyaux admettent une interesection triviale, d'après le cours. Brièvement, pour $i \neq j$, on trouve f, g tels que $f(x)(x - \lambda_j)^{a_j} + g(x)(x - \lambda_i)^{a_i} = 1$. En évaluant en T, et en considérant l'image par v_j, on a

$$f(T)(T - \lambda_j I)^{a_j} v_j + g(T)(T - \lambda_i I)^{a_i} v_j = v_j,$$

d'où $v_j = 0$ pour tout $j \neq i$.

Par conséquent, $v = v_i \in V_i$, comme souhaité.

b) *Soit a_i le plus petit entier tel que $N_i^{a_i} = 0$. Alors*

$$\{0\} \neq N_i^{a_i - 1}(V_i) = (T - \lambda_i I)^{a_i - 1}(V_i)$$

et donc on peut choisir un vecteur $0 \neq v \in (T - \lambda_i I)^{a_i - 1}(V_i) \subseteq V_i$. Pour ce vecteur, on a

$$(T - \lambda_i I)(v) \in (T - \lambda_i I)^{a_i}(V_i) = \{0\}$$

car $V_i \subseteq \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ par le point a). Ainsi, v est un vecteur propre de valeur propre λ_i.

c) *Soit $v \in V$. On peut écrire $v = \sum_{i=1}^{k} v_i$ avec $v_i \in V_i$. Remarquons que $(T - \lambda_i I)^{a_i}(v_j) \in V_j$ pour tout $v_j \in V_j$ (car T et I envoient V_j dans V_j), et donc en appliquant les termes $(T - \lambda_j I)^{a_j}$ l'un après l'autre, on obtient*

$$
\begin{aligned}
f(T)(v) &= \left(\prod_{i=1}^{k}(T-\lambda_i I)^{a_i}\right)(v) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}(T-\lambda_i I)^{a_i}\right)(v_1+\dots+v_k) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1}(T-\lambda_i I)^{a_i}\right)((T-\lambda_k I)^{a_k}(v_1+\dots v_k)) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1}(T-\lambda_i I)^{a_i}\right)\left(\underbrace{(T-\lambda_k I)^{a_k}(v_1)}_{=:v_1'\in V_1}+\dots+\underbrace{(T-\lambda_k I)^{a_k}(v_k)}_{=0}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1}(T-\lambda_i I)^{a_i}\right)(v_1'+\dots+v_{k-1}') \\
&\vdots \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

où on a utilisé que $V_i \subseteq \ker(T-\lambda_i)^{a_i}$ par la partie a).

d) *Si $v \in V$ est un vecteur propre de valeur propre $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, remarquons que pour tout i, on a*

$$
\begin{aligned}
&& (T-\lambda_i I)(v) &= \underbrace{(\lambda-\lambda_i)}_{\neq 0} v \\
\Rightarrow && (T-\lambda_i I)^{a_i}(v) &= (\lambda-\lambda_i)^{a_i} v \\
\Rightarrow && \left(\prod_{i=1}^{k}(T-\lambda_i I)^{a_i}\right)(v) &= \prod_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{a_i} v \\
&& &\neq 0.
\end{aligned}
$$

e) *On a montré que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T (partie d)), et que chaque λ_i est une valeur propre. Si J est une forme normale de Jordan quelconque de T, on peut trouver une décomposition de T comme dans l'énoncé du lemme 5.20 de sorte que les λ_i sont précisément les éléments diagonaux de J.*

Exercice 7. Soit $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice formée par des blocs de Jordan ayant chacun la même valeur λ sur la diagonale. Montrer que

a) Le polynôme caractéristique de M est $p_M(t) = (\lambda - t)^n$.

b) Le polynôme minimal de J est $m_J(t) = (t-\lambda)^k$, où k est la taille du plus gros bloc de Jordan.

En déduire, à l'aide de l'exercice précédent, que le polynôme minimal d'une matrice générale est $\prod_{i=1}^r (t-\lambda_i)^{k_i}$, si et seulement si la taille du plus gros bloc de Jordan associé à la valeur λ_i est k_i pour tout $i = 1, \ldots, r$.

Solution.

a) Clair : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.

b) Le polynôme minimal divisant forcément le polynôme caractéristique, il doit être de la forme $(\lambda - x)^k$ pour un certain $k \leq n$.

Remarquons que la matrice de $(M - \lambda I)^m$ est bloc-diagonale, avec des blocs du type $(B - \lambda I)^m$, où B est un bloc de Jordan associé à λ. L'application $B - \lambda I$ est l'application de décalage, dont les puissances devienne progressivement nulles. On vérifie sans peine que $(B-\lambda I)^m$ est nulle si et seulement si m est supérieur à la taille du bloc B.

En outre, $(M - \lambda I)^m$ est nulle si et seulement si m est supérieur à la taille de chaque bloc. En particulier, le m minimal est celui correspondant au plus gros bloc constituant M.

Considérons désormais un matrice générale M et sa forme de Jordan J. Le polynôme minimal de M divise celui de J et vice versa : ils sont donc égaux car leur coefficient dominant est 1.

De surcroît, le polynôme minimal de J divise son polynôme caractéristique par Cayley-Hamilton, et il est donc de la forme $\prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{k_i}$ pour certains k_i.

Posons $J = \begin{pmatrix} J_\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & J_\mu \end{pmatrix}$, où chaque J_λ est bloc-diagonale construite à partir des blocs de Jordan de J associés à λ (attention : J_λ n'est pas forcément un bloc de Jordan).

On vérifie alors que

$$\prod_{i=1}^r (J - \lambda_i I)^{k_i} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^r (J_\lambda - \lambda_i I)^{k_i} & & \\ & \ddots & \\ & & \prod_{i=1}^r (J_\mu - \lambda_i I)^{k_i} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $(J_\lambda - \lambda_i I)^{k_i}$ est triangulaire supérieure, de diagonale $(\lambda - \lambda_i)^{k_i} \neq 0$ si $\lambda \neq \lambda_i$. Les matrices $(J_\lambda - \lambda_i I)^{k_i}$ sont donc inversibles dès que $\lambda_i \neq \lambda$. Par conséquent, $\prod_{i=1}^r (J - \lambda_i I)^{k_i}$ est la matrice nulle si et seulement si chaque bloc $(J_\lambda - \lambda I)^k$ est nul. Le point b) permet alors de conclure.

Exercice 8. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient J une forme normale de Jordan de A, P la matrice de passage associée ($A = PJP^{-1}$).

1. Soient $B_1, ..., B_k$ l'ensemble des blocs de J associés à une même valeur propre λ. Montrer que $\dim \operatorname{Im}(J - \lambda I) = n - k$.

2. En déduire que le nombre de blocs de J associés à une valeur propre λ est égal à sa multiplicité géométrique $\dim \ker(A - \lambda I)$.

3. Montrer que si A est diagonalisable, chaque bloc de Jordan est de taille 1 et la décomposition $A = PJP^{-1}$ est exactement sa diagonalisation.

Solution. *En classe.*