EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Exercice bonus 6	

Si vous le souhaitez, vous pouvez rendre votre solution de l'exercice bonus sur la page Moodle du cours avant le mardi 30 mai, 18h.

Exercice bonus 6. Soit k un corps. On considère le corps des fonctions rationnelles $k(t)$. Soit $a, b, c, d \in k$ avec $ad - bc \neq 0$.

1. Soit $s \in k(t)$ non-constant. Montrer qu'il existe un unique k-morphisme $\phi_s : k(t) \to k(s)$ qui envoie t sur s.

   Indication. Pour l'injectivité $k[t] \to k(s)$, montrer d'abord si $s = p(t)$ pour $p(t) \in k[t]$. Montrer ensuite pour $s = \frac{p(t)}{q(t)}$ en supposant que $(p(t), q(t)) = 1$. Remarquer que si un polynôme non-nul de degré n annule s, alors forcément $q(t)|p(t)^n$ dans $k[t]$.

2. Pour $s = \frac{at+b}{ct+d}$, montrez que ϕ_s défini un k-automorphisme de $k(t)$.

   En utilisant le langage de la géométrie algébrique, on peut montrer que tout k-automorphisme de $k(t)$ est de cette forme. Ce fait n'est pas utile pour le reste de cet exercice.

3. Démontrez que l'association $\mathrm{GL}(2, k) \to \mathrm{Aut}_k(k(t))$ définie par

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \phi_{\frac{at+b}{ct+d}}$$

   donne un homomorphisme injectif des groupes

$$\alpha : \mathrm{PGL}(2, k) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_k(k(t)).$$

4. Pour les éléments $g \in \mathrm{PGL}(2, k)$ suivants, si $G = \langle \alpha(g) \rangle$, calculer $d = [k(t) : k(t)^G]$.

   (a) Calculer ce degré avec

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Supposons que $\mathrm{char}(k) \neq 2$ et que k possède une racine primitive n-ième de l'unité (un élément d'ordre n dans le groupe multiplicatif $k^\times$) qu'on note ξ. Calculer ce degré avec

$$g = \begin{pmatrix} \xi + \frac{1}{\xi} & -\xi + \frac{1}{\xi} \\ -\xi + \frac{1}{\xi} & \xi + \frac{1}{\xi} \end{pmatrix}.$$