EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Corrigé – bonus 6	

Exercice bonus 6. Soit k un corps. On considère le corps des fonctions rationnelles $k(t)$. Soit $a, b, c, d \in k$ avec $ad - bc \neq 0$.

1. Soit $s \in k(t)$ non-constant. Montrer qu'il existe un unique k-morphisme $\phi_s : k(t) \to k(s)$ qui envoie t sur s.

   Indication. Pour l'injectivité $k[t] \to k(s)$, montrer d'abord si $s = p(t)$ pour $p(t) \in k[t]$. Montrer ensuite pour $s = \frac{p(t)}{q(t)}$ en supposant que $(p(t), q(t)) = 1$. Remarquer que si un polynôme non-nul de degré n annule s, alors forcément $q(t)|p(t)^n$ dans $k[t]$.

2. Pour $s = \frac{at+b}{ct+d}$, montrez que ϕ_s défini un k-automorphisme de $k(t)$.

3. Pour $s = \frac{at+b}{ct+d}$, montrez que ϕ_s défini un k-automorphisme de $k(t)$.

   En utilisant le langage de la géométrie algébrique, on peut montrer que tout k-automorphisme de $k(t)$ est de cette forme. Ce fait n'est pas utile pour le reste de cet exercice.

4. Démontrez que l'association $\mathrm{GL}(2, k) \to \mathrm{Aut}_k(k(t))$ définie par

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \phi_{\frac{at+b}{ct+d}}$$

   donne un homomorphisme injectif des groupes

$$\alpha : \mathrm{PGL}(2, k) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_k(k(t)).$$

5. Pour les éléments $g \in \mathrm{PGL}(2, k)$ suivants, si $G = \langle \alpha(g) \rangle$, calculer $d = [k(t) : k(t)^G]$.

   (a) Calculer ce degré avec

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Supposons que $\mathrm{char}(k) \neq 2$ et que k possède une racine primitive n-ième de l'unité (un élément d'ordre n dans le groupe multiplicatif $k^\times$) qu'on note ξ. Calculer ce degré avec

$$g = \begin{pmatrix} \xi + \frac{1}{\xi} & -\xi + \frac{1}{\xi} \\ -\xi + \frac{1}{\xi} & \xi + \frac{1}{\xi} \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. Soit $s \in k(t)$ non constant. On pose le k-morphisme, $\psi_s : k[t] \to k(s)$ qui envoie $t \mapsto s$ par propriété universelle de l'anneau de polynôme $k[t]$. Si $s = p(t)$ un polynôme non non-constant, en regardant le terme de plus haut degré, on voit que ϕ_s est injective. Si par l'absurde $s = \frac{p(t)}{q(t)}$ avec $(p(t), q(t)) = 1$ est annulé par un polynôme non-nul, cela signifie que (pour $a_n \neq 0$)

$$\sum_{i=0}^{n} a_n p(t)^i q(t)^{n-i} = 0.$$

   Alors

$$p(t)^n = \frac{-1}{a_n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} p(t)^i q(t)^{n-1-i} \right) q(t).$$

Et donc $q(t)|p(t)^n$. Mais alors comme $(p(t), q(t)) = 1$ on voit $q(t) = \lambda \in k$. Mais comme aucun polynôme non-nul n'annule $p(t)/\lambda$ on obtient une contradiction. Par la propriété universelle du corps des fractions, on a alors un unique k-morphisme $k(t) \to k(s)$.

Barème. 10 pts

2. L'inverse est donné par $\phi_{s'}$ pour

$$s' = \left(\frac{1}{ad - bc}\right) \frac{dt - b}{-ct + a}.$$

Barème. 10 pts

3. On omet la vérification que c'est un morphisme qui est un calcul direct.

Si $t = \frac{at+b}{ct+d} = t$ on voit que $a = d \neq 0$ et que $0 = b = c$. Cela montre que l'application de la donnée définit un homomorphisme injectif des groupes

$$\alpha : \mathrm{PGL}(2, k) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_k(k(t)).$$

Barème. 10 pts pour montrer que c'est un morphisme de $\mathrm{GL}(2, k) \to \mathrm{Aut}_k(k(t))$, 10 pts pour montrer que le noyau sont les matrices scalaires.

4. (a) On commence par le cas où $\mathrm{char}(k) = 0$. Comme l'orbite de t est $(t + n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui est infinie, on voit que $d = \infty$ par la proposition 4.6.11 (car l'extension n'est donc pas algébrique par contraposition).

Si $\mathrm{char}(k) = p > 0$, alors g est d'ordre p et donc $d = p$ par le théorème 4.6.13.

Dans le premier cas, on peut montrer $k(t)^G = k$ et dans le deuxième $k(t)^G = k(t^p - t)$.

Barème. 15+15 pts pour le cas de la caractéristique zéro et celui de la caractéristique p.

(b) Une récurence sur $n \geq 0$ montre que

$$g^n = \begin{pmatrix} \xi^n + \frac{1}{\xi^n} & -\xi^n + \frac{1}{\xi^n} \\ -\xi^n + \frac{1}{\xi^n} & \xi^n + \frac{1}{\xi^n} \end{pmatrix}$$

dans $\mathrm{PGL}(2, k)$. On voit donc $g^k = 1_{\mathrm{PGL}(2,k)}$ si et seulement si $\xi^{2k} = 1$. Ainsi g est d'ordre $\frac{n}{2}$ si n est pair et d'ordre n si est impair. Par le théorème 4.6.13, $d = \frac{n}{2}, n$ selon ces cas.

Barème. 15 pts pour le calcul de g^n. 15 pts pour conclure correctement.