III. Les sections coniques

La semaine passée, nous avons étudié les coniques par leur définition focale et/ou bifocale. Nous avons trouvé les expressions des équations du second degré qui les caractérisent. Aujourd'hui, nous voulons encore comprendre pourquoi ces courbes s'appellent coniques, puis apprendre des techniques qui permettent de trouver leurs caractéristiques à partir de leur équation.

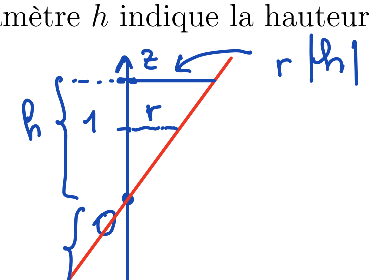
1 Sections coniques

C'est probablement à Apollonius, né à Perga (en Turquie actuellement) vers -262 et décédé vers -190, que l'on doit la première étude des coniques en tant que telles (sections planes d'un cône). C'est lui qui donna à l'ellipse, à la parabole et à l'hyperbole les noms que nous leur connaissons, même si ce n'est qu'à travers des écrits de Pappus (4ème siècle) que les géomètres de la Renaissance déduisirent les découvertes d'Apollonius. On lui attribue l'hypothèse des orbites excentriques pour expliquer le mouvement apparent des planètes et la variation de vitesse de la Lune !

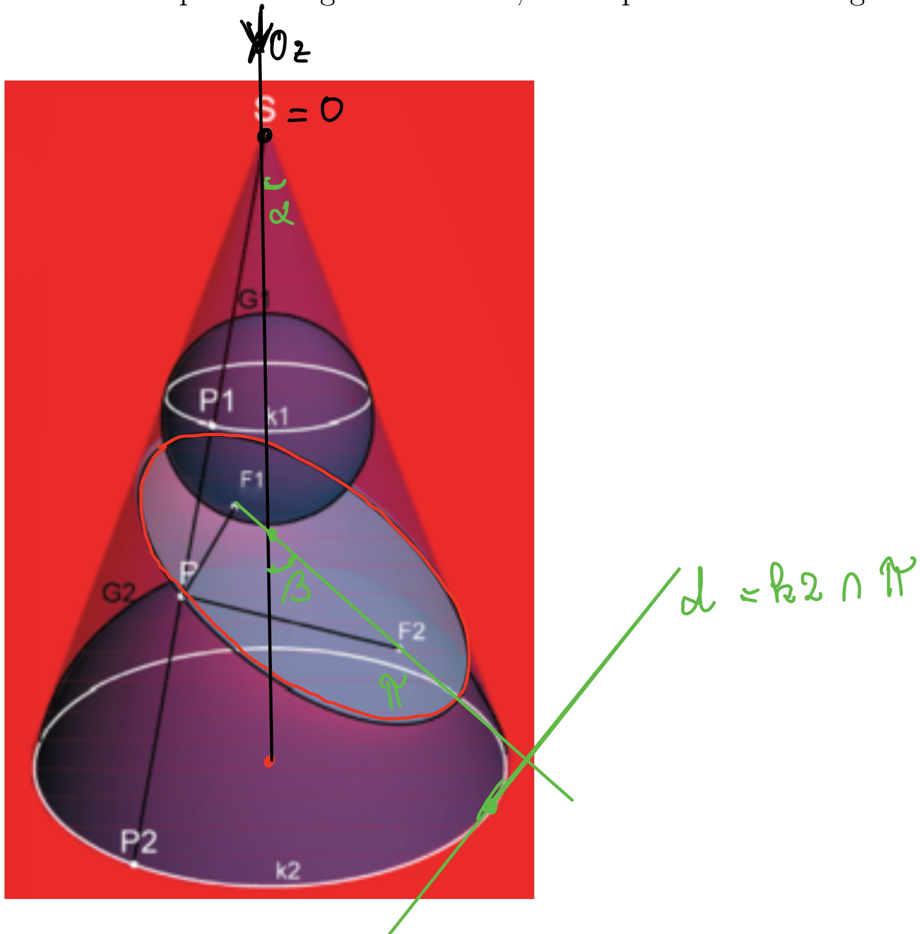
Par un *cône*, on entend ici un cône de révolution formé par la rotation d'une droite autour d'un axe qu'elle coupe en un point. Sans restreindre la généralité, on supposera que ce point est l'origine et que l'axe de rotation est l'axe Oz. En d'autres termes, nous étudierons les cônes donnés par

$$\{(|h| r\cos\varphi\,;|h| r\sin\varphi\,;\,h) \text{ t.q. } h\in\mathbb{R}\,;\quad 0\leq\varphi<2\pi\}$$

où $r > 0$ est un nombre fixé qui indique le rayon du cercle situé dans le plan $z = 1$.
Le paramètre h indique la hauteur et φ l'angle formé dans le plan horizontal.



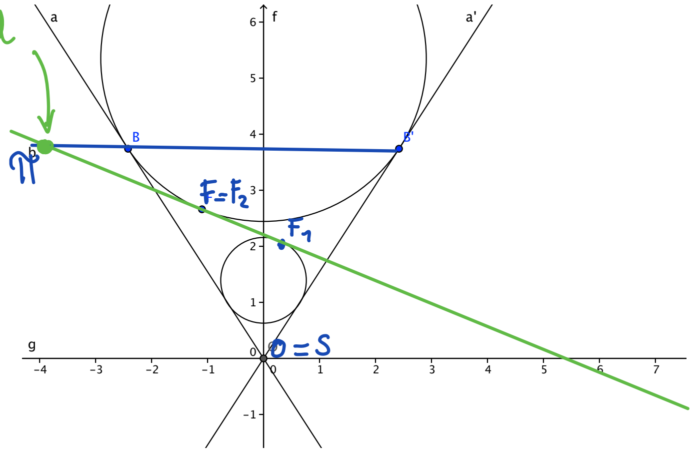
Notre but premier est de comprendre comment un plan quelconque coupe un tel cône. Lorsque le plan est horizontal l'intersection est visiblement un cercle (ou un point), mais que se passe-t-il en général ? Nous pouvons supposer, quitte à effectuer une rotation autour de l'axe Oz, que le plan π considéré est donné par une droite horizontale d et une droite F_1F_2 se trouvant dans le plan Oyz, définissant un angle β compris entre 0 et $\pi/2$ avec Oz . Nous suivrons la méthode du mathématicien belge Germinal Pierre Dandelin (né le 12 avril 1794 au Bourget, France, décédé le 15 février 1847 à Bruxelles). Considérons, parmi toutes les sphères tangentes au cône, celles qui sont aussi tangentes au plan :



Il y a exactement deux telles sphères. Soit α l'angle défini par la droite de révolution et l'axe Oz. Dans le cas où $\beta > \alpha$, les intersections des objets étudiés avec le plan Oyz forment un triangle dont on construit deux cercles inscrits et exinscrits :

Le cône est "renversé" sur son sommet

plan qui coupe le cône →



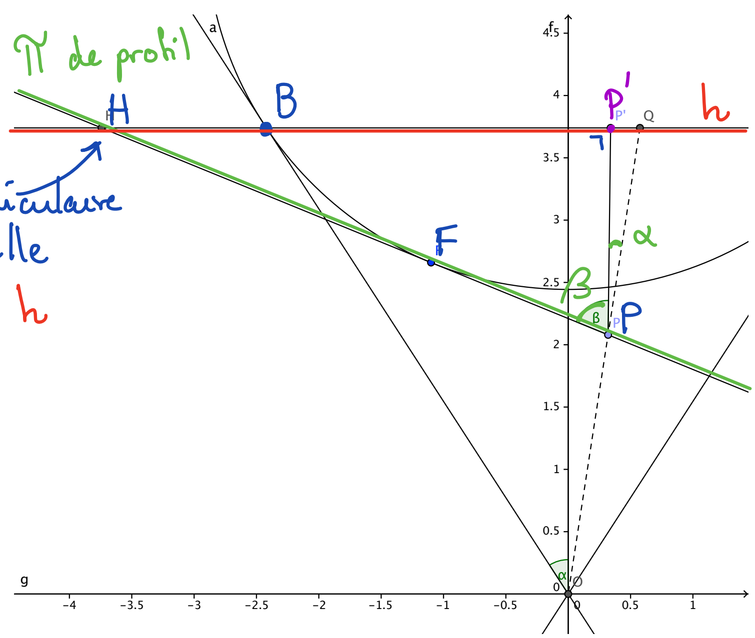
Théorème 1.1. *L'intersection d'un cône et d'un plan est soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole.*

Démonstration. Considérons les points, droites et plans suivants :

π de profil

d perpendiculaire à la feuille

$d = \pi \cap h$



Soit F le point de tangence de la grande sphère avec π.
P un point (mobile) d'intersection entre le plan π et le cône.

h : plan horizontal dans lequel se trouve k_2 le cercle tangent au cône et à la "grande" sphère.

P' : projection orthogonale de P sur h.

H : projection orthogonale de P sur d = projection orthogonale de P' sur d.

<u>But</u> : Montrer que $\delta(P, F) = e \cdot \delta(P, d)$

le triangle PP'H est vu de face en taille réelle ! $\Rightarrow |PP'| = |PH| \cdot \cos\beta$

On trace (en pointillé) la droite OP qui coupe le cercle de tangence de la grande sphère en Q. (qui n'est pas dans le plan Oyz)

$|PQ| = |PF|$ car Q et F sont deux points de tangence de droites issues de P.

Dans le triangle PP'Q, $\measuredangle P'PQ = \alpha$ car $PP' \parallel Oz$ et $PQ \in$ génératrice du cône.

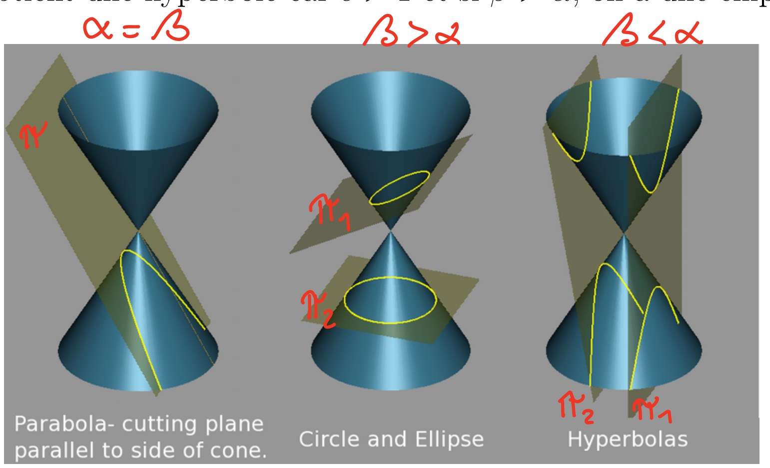
$\Rightarrow |PP'| = |PQ| \cos\alpha$

$\Rightarrow |PP'| = |PH| \cos\beta = |PQ| \cos\alpha \Leftrightarrow \dfrac{\overbrace{|PQ|}^{=|PF| = \delta(P;F)}}{\underbrace{|PH|}_{= \delta(P;d)}} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} = e$

Ainsi, $\delta(P, F) = e \cdot \delta(P; d)$

□

Exemple 1.2. Lorsque l'angle β entre le plan p et la verticale vaut exactement α, alors $e = 1$ et la conique est une parabole.
Lorsque $\beta < \alpha$, on obtient une hyperbole car $e > 1$ et si $\beta > \alpha$, on a une ellipse.



2 L'équation générale d'une conique

Nous avons déduit de la définition d'une conique (par foyer et directrice) que l'équation générale d'une telle courbe est donnée par une équation du second degré de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

vu la semaine dernière si $2bxy = 0$

Comment reconnaître la conique décrite par une telle formule et comment trouver ses foyers par exemple ? Nous aimerions faire un changement de variables pour éliminer le terme en xy. Autrement dit, puisque nous savons que cette équation décrit une conique, nous cherchons son axe de symétrie afin de remplacer le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ par un autre repère orthonormé $(O, \vec{f_1}, \vec{f_2})$ dans lequel l'équation se simplifie. Comme $\vec{f_1}$ est de longueur 1, il a la forme

$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ d'où $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ puisqu'on veut une base orthonormée.

$B = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ = base initiale $B^* = (\vec{f_1} ; \vec{f_2})$ = nouvelle base

Quelle est la relation entre les expressions des inconnues x, y et des nouvelles inconnues dans la nouvelle base ? Les inconnues x et y sont les coordonnées dans la base canonique des points P se trouvant sur la conique. Les nouvelles coordonnées (u, v) dans la nouvelle base sont obtenues par un simple changement de base :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{B^*} = \begin{pmatrix} u\cos t - v\sin t \\ u\sin t + v\cos t \end{pmatrix}$$

Remplaçons l'expression de $x = u\cos t - v\sin t$ et $y = u\sin t + v\cos t$ dans l'équation de la conique et voyons comment éliminer le double produit. Dans la pratique, il faudra tenir compte de tous les coefficients, mais pour nous, ici, nous nous concentrons sur la partie quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Cette expression devient

$$a(u\cos t - v\sin t)^2 + 2b(u\cos t - v\sin t)(u\sin t + v\cos t) + c(u\sin t + v\cos t)^2$$

$-2auv\cos t\sin t + 2buv(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2cuv\sin t\cos t$

La partie en uv de cette expresion vaut $2[(c-a)\sin t\cos t + b(\cos^2 t - \sin^2 t)]$, ou encore

$$2\cos t(c\sin t + b\cos t) - 2\sin t(a\cos t + b\sin t). \qquad (*)$$

Maintenant arrive l'observation clé !

Si $\vec{f_1}$ est vecteur propre de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ pour la valeur propre λ, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\vec{f_1}} = \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ b\cos t + c\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cos t \\ \lambda\sin t \end{pmatrix} = \lambda \vec{f_1}$$

L'expression $(*)$ vaut alors $2\cos t(\lambda\sin t) - 2\sin t(\lambda\cos t) = 0$

Donc le terme en uv disparaît.

Il faut donc trouver une valeur propre de A avec un vecteur propre de norme 1.

Proposition 2.1. *Si $\vec{f_1}$ est un vecteur propre de norme 1 de la matrice A, le changement de variable $x = u\cos t - v\sin t$ et $y = u\sin t + v\cos t$ rend l'équation quadratique de la forme*

$$a'u^2 + c'v^2 + 2d'u + 2e'v + f' = 0.$$

Remarque 2.2. En effectuant le changement de variable les valeurs des coefficients a' et c' sont les suivants :

$$a' = a\cos^2 t + 2b\cos t\sin t + c\sin^2 t \quad \text{et} \quad c' = a\sin^2 t - 2b\cos t\sin t + c\cos^2 t.$$

Exemple 2.3. On considère la conique d'équation $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 32y + 92 = 0$.

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dont une valeur propre est visiblement 2 (et 4)

$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y$

$\vec{v} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ à normaliser $\Rightarrow \vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{f_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(on remarque que $\vec{f_2}$ est vecteur propre de A pour l'autre valeur propre 4).

Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-u+v) \end{cases}$

$$3 \cdot \frac{1}{2}(u+v)^2 + 2\,\frac{1}{2}(u+v)(-u+v) + 3 \cdot \frac{1}{2}(-u+v)^2 - 32 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(-u+v) + 92 = 0$$

En effectuant une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, on arrive à une forme agréable

$$2u^2 + 4v^2 + 16\sqrt{2}u - 16\sqrt{2}v + 92 = 0$$

En fait, les nouveaux coefficients a' et c' sont les deux valeurs propres de la matrice A ! Pour continuer, il ne reste plus qu'à effectuer une translation afin d'éliminer les termes en u et v. Ceci se fait comme d'habitude en complétant les carrés.

Exemple 2.4. On considère la conique d'équation $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 32y + 92 = 0$.

Après le changement de variable $x = u\frac{\sqrt{2}}{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = -u\frac{\sqrt{2}}{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2}$, on arrive à

$$2u^2 + 4v^2 + 16\sqrt{2}u - 16\sqrt{2}v + 92 = 0.$$

$2(u^2 + 8\sqrt{2}u + \dots)$
$4(v^2 - 4\sqrt{2}v + \dots)$

Complétons les carrés :

$$2\underbrace{\left(u+4\sqrt{2}\right)}_{X}^2 + 4\underbrace{\left(v-2\sqrt{2}\right)}_{Y}^2 + \underbrace{92-64-32}_{=-4} = 0$$

Par conséquent, en effectuant le changement de variables $X = u + 4\sqrt{2}$ et $Y = v - 2\sqrt{2}$, on obtient

$$2X^2 + 4Y^2 = 4 \iff \frac{X^2}{2} + Y^2 = 1 \Rightarrow \text{ellipse}$$

Pour arriver sous cette forme, on a effectué une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ puis une translation de vecteur $\begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Comment déterminer quelle type de conique se cache derrière une équation générale ?

Définition 2.5. Le *discriminant* de la conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ est le nombre $\Delta = b^2 - ac$.

Théorème 2.6. *La conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ est une ellipse si son discriminant $\Delta < 0$, une parabole si $\Delta = 0$ et une hyperbole si $\Delta > 0$.*

Démonstration. Après avoir fait le changement de variable correspondant à une rotation, nous avons calculé les valeurs $a' = a\cos^2 t + 2b\cos t \sin t + c\sin^2 t$ et $c' = a\sin^2 t - 2b\cos t\sin t + c\cos^2 t$ de la nouvelle équation $a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0$. Que vaut le discriminant de cette équation ?

Observons que la matrice $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice A.

On l'obtient en effet en effectuant le changement de base correspondant à la rotation d'angle t :

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = S^{-1}AS.$$

$$\Rightarrow \Delta' = -\det A' = -\det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S = -1 \cdot \det A \cdot 1 = \Delta$$

Le discriminant reste le même avec le changement de variable.

Lorsqu'on a la forme finale $AX^2 + CY^2 = E$, le discriminant vaut $-AC = \tilde{\Delta}$.

$\tilde{\Delta} > 0 \Rightarrow$ A et C sont de signes opposés $\Rightarrow$ hyperbole. □

$\tilde{\Delta} < 0 \Rightarrow$ A et C de même signe $\Rightarrow$ ellipse.

$\tilde{\Delta} = 0 \Rightarrow$ soit A, soit C est nul $\Rightarrow$ parabole
(et il reste un terme en X si A = 0 ou un terme en Y si C = 0)

Exemple 2.7. On étudie la conique d'équation $x^2 + 6xy + 9y^2 + \sqrt{19}x + \sqrt{10}y = 0$.
On calcule

$$\Delta = 3^2 - 1 \cdot 9 = 0 \Rightarrow \text{parabole.}$$

Mais laquelle ? Une valeur propre évidente de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ est 0

Vecteur propre associé : $\vec{v} = k\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On effectue donc le changement de variables $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3u + v) \text{ et } y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-u + 3v).$$

On calcule la nouvelle forme de l'équation en coordonnées $(u; v)$ par rapport à la nouvelle base obtenue après rotation et on obtient

$$10v^2 + 2u + 4v = 0,$$

ou $u = -5v^2 - 2v$. Il s'agit d'une parabole concave dans le repère donné par $(O; \vec{f_1}; \vec{f_2})$.
Son sommet se trouve au point du graphe de cette fonction quadratique où la dérivée s'annule, donc lorsque $v = -\frac{1}{5}$ et on obtient $u = \frac{1}{5}$.
En faisant le changement de variables inverse, on obtient $x_s = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3 \cdot \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2}{5\sqrt{10}}$

et $y_s = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(-\frac{1}{5} + 3\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{-4}{5\sqrt{10}}$

$$\Rightarrow S\left(\frac{2}{5\sqrt{10}} ; \frac{-4}{5\sqrt{10}}\right)$$