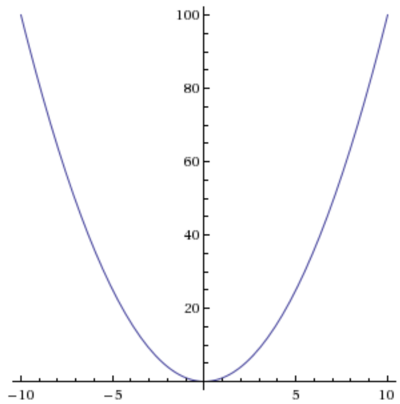
Corrigé série 26

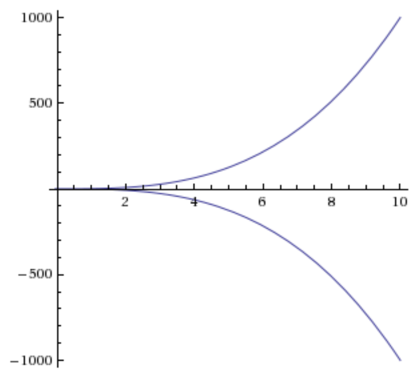
Exercice 1. (8 points)

Dans chaque partie, on utilise le fait qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est continue si et seulement si les deux composantes sont continues.

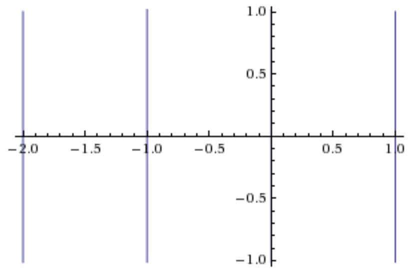
a) Oui, $f(t) = (t, t^2)$ est continue.



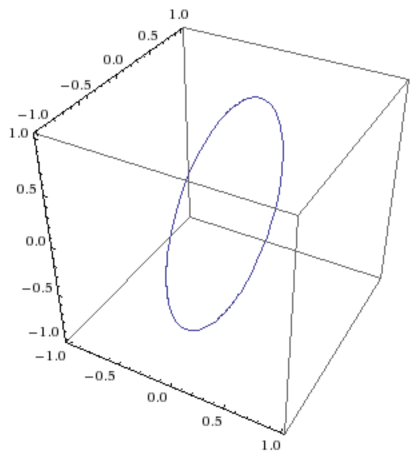
b) Oui, $f(t) = (|t|, t^3)$ est continue.



c) Non, $f(t) = (\lfloor \frac{t}{2\pi} \rfloor, \cos t)$ n'est pas continue, comme la première composante ne l'est pas.



d) Oui, $f(t) = (\lfloor \frac{t}{2\pi} \rfloor, \cos t, \sin t)$ est continue sur son domaine $[0, 2\pi)$. En effet, la première composante vaut 0 identiquement, et $\cos t$ et $\sin t$ sont aussi continues.



Exercice 2. (2 + 4 = 6 points)

a) La fonction $f(t) = (t + 1, 2t + 2, 3t + 3)$ satisfait les conditions.

b) La fonction $f(t) = (t \cos 2\pi t, t \sin 2\pi t, t)$ satisfait les conditions.

Exercice 3. (10 points)

a) Non, $g_t(\vec{x}) = \vec{x} + (1 + t)\vec{x}$ n'est pas un mouvement, comme g_0 n'est pas l'identité.

b) Oui, il est clair que $g_t(\vec{x}) = \vec{x}$ est un mouvement.

c) Non, si $t > 0$, $g_t(x) = \vec{x} - t\vec{x}$ ne préserve pas la distance entre deux vecteurs, i.e., $d(g_t(\vec{x}), g_t(\vec{y}))$ ne vaut pas toujours $d(\vec{x}, \vec{y})$, où $d(\cdot, \cdot)$ est la métrique euclidienne.

d) Non, de même que ci-dessus, $g_t = \vec{x} + t\vec{x}$ n'est pas un mouvement.

e) Non. Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $g_t(\vec{x}) := (I_3 + t(A - I_3))\vec{x}$ n'est pas une isométrie pour tout $t \in [0, 1]$ (par exemple, pour $t = \frac{1}{2}$).

Exercice 4. (2 + 4 = 6 points)

a) Pour tout $t \in [0, 1]$, on écrit

$$A_t := \begin{pmatrix} \cos \pi t & \sin \pi t \\ -\sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}.$$

Alors, le mouvement qui emmène $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ sur le vecteur $-\vec{x}$ par rotation est

$$g_t(\vec{x}) = A_t\vec{x}.$$

b) Posons α l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan créé par ces deux vecteurs. On peut par exemple commencer par faire une symétrie axiale d'axe $\vec{u}$, qui laisse fixe $\vec{u}$ mais qui envoie $\vec{x}$ sur $-\vec{x}$ et $\vec{v}$ de "l'autre côté" de $\vec{u}$, avec le même angle α. On fait ensuite une rotation d'angle $\vec{x}$ et d'angle α pour obtenir le résultat.

Exercice 5. (15 points (a, d, g donne 1 point, chaque autre item donne 2 points))

a) **Vrai.** Voir la définition de continuité pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

b) **Vrai.** Il y a beaucoup d'exemples. Un tel exemple est le mouvement

$$g_t(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos(\pi f(t)) & \sin(\pi f(t)) \\ -\sin(\pi f(t)) & \cos(\pi f(t)) \end{pmatrix} \vec{x}.$$

où $f(t) = e^{t(t-\frac{1}{2})} - 1$.

c) **Faux.** Un mouvement est constitué d'isométries directes.

d) **Vrai.** Soit $\vec{v} = (1, 1)$. Alors un tel mouvement est

$$g_t(\vec{x}) = \vec{x} + (t^2 - t)\vec{v}.$$

e) **Faux** dès lors que $b \neq 0$ et **Vrai** si $b = 0$.
De fait, toutes les applications bilinéaires $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de la forme $f(x, y) = axy$.

f) **Vrai.** On sait que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta,$$

où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, on a $\sin\theta = 1$, et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est maximisé.

g) **Faux.** Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $(\vec{u} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$, mais

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\vec{v} \neq \vec{0}.$$

h) **Vrai.** Par anti-commutativité, on voit que

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) = \vec{u} \wedge [-(\vec{u} \wedge \vec{v})] = -(-(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}.$$

i) **Faux.** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme dans la partie g) ci-dessus donne un contre-exemple.

Exercice 6. (4 points) Il faut que le plan soit parallèle aux vecteurs $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc, le plan doit être normal au vecteur $\vec{BA} \wedge \vec{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On trouve que l'équation du plan est

$$-x + z = 0.$$

Exercice 7. (8 points) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) On trouve que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) En utilisant la formule

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta,$$

on trouve que l'angle θ entre $\vec{u}, \vec{v}$ est

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 1.25 \text{ radians}.$$

c) En utilisant la formule

$$\|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|\|\vec{w}\| \sin\theta,$$

on trouve que l'angle θ entre $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{w}$ est

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{17}}{9}\right) \approx 0.48 \text{ radians}.$$

d) Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ est

$$|\langle \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle| = 16.$$

Exercice 8. (4 points) Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u}^t A \vec{v} = a u_1 v_1 + b u_1 v_2 + c u_2 v_1 + d u_2 v_2.$$

Dans cette forme, il est facile de voir que $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u}^t A \vec{v}$ est bilinéaire.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}^t A \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Exercice 9. (4 points) Le volume du parallélépipède est donné par la formule

$$V = | < \vec{AB}, (\vec{AC} \wedge \vec{AD}) > |.$$

Comme

$$\vec{AC} \wedge \vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on trouve que

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 6.$$

Exercice 10. (3 + 3 + 2 = 8 points)

a) Soit $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ un vecteur dans $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, il est trivial de voir que, pour un $\vec{y}_0 = (y_1, y_2, y_3)$ fixé, l'application

$$\vec{x} \mapsto \langle \lambda\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}_0 \rangle = (\lambda x_1 + z_1)y_1 + (\lambda x_2 + z_2)y_2 + (\lambda x_3 + z_3)y_3$$

est linéaire. De même, si on fixe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, l'application

$$\vec{y} \mapsto \langle \vec{x}_0, \lambda\vec{y} + \vec{z} \rangle$$

est linéaire.

b) Une rotation ρ préserve la distance de tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, donc

$$\|\rho(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|,$$

où $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ est la norme euclidienne. La clé est d'observer que l'on peut écrire le produit scalaire comme un somme des carrés des distances. En fait, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, on a que

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x + y\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \right),$$

ce qui implique que

$$\langle \rho(\vec{x}), \rho(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

c) Non, il y a plusieurs d'applications bilinéaires $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Un exemple d'application est

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \cdot y_1, \quad \text{et plus généralement} \quad f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

où $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ et $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. (12 points)

a) Soient $\vec{u} = \lambda\vec{e}_1$, $\vec{v} = \mu\vec{e}_2$, et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Alors, on trouve que

$$\begin{aligned}(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \lambda\mu\vec{e}_3 \wedge \vec{w} \\ &= (-\lambda\mu w_2)\vec{e}_1 + (\lambda\mu w_1)\vec{e}_2.\end{aligned}$$

En même temps,

$$\begin{aligned}\langle\vec{u}, \vec{w}\rangle\vec{v} - \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle\vec{u} &= (\lambda w_1)\vec{v} - (\mu w_2)\vec{u} \\ &= (\lambda\mu w_1)\vec{e}_2 - (\lambda\mu w_2)\vec{e}_1.\end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales.

b) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors il existe une rotation $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui emmène $\vec{u}$ sur $\lambda\vec{e}_1$ et $\vec{v}$ sur $\mu\vec{e}_2$, où λ (respectivement, μ) est la longueur de $\vec{u}$ (respectivement, $\vec{v}$). Mais, comme conséquence du Théorème 2.4 des notes “Le Produit Vectoriel” et en utilisant la première partie, on trouve que

$$\begin{aligned}\rho((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}) &= (\rho(\vec{u}) \wedge \rho(\vec{v})) \wedge \rho(\vec{w}) \\ &= \langle\rho(\vec{u}), \rho(\vec{w})\rangle\rho(\vec{v}) - \langle\rho(\vec{v}), \rho(\vec{w})\rangle\rho(\vec{u}) \\ &= \langle\vec{u}, \vec{w}\rangle\rho(\vec{v}) - \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle\rho(\vec{u}) \\ &= \rho\left(\langle\vec{u}, \vec{w}\rangle\vec{v} - \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle\vec{u}\right).\end{aligned}$$

Donc, par injectivité de la rotation ρ, on voit que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \langle\vec{u}, \vec{w}\rangle\vec{v} - \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle\vec{u}.$$

c) En général, pour tous $\vec{u}, \vec{v}$, on peut décomposer $\vec{v}$ comme

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

où $\vec{v}_1$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}_2$ est parallèle à $\vec{u}$. En fait, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont uniques et on a

$$\vec{v}_2 = \frac{\langle\vec{v}, \vec{u}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u} \text{ et } \vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{v}_2.$$

Posons $\vec{v}_2 = \lambda\vec{u}$ (c'est possible comme $\vec{v}_2$ est parallèle à $\vec{u}$). En utilisant la bilinéarité du produit vectoriel et du produit scalaire et le fait que $\langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle = 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}_2 = \vec{0}$, on trouve que

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} &= (\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) \wedge \vec{w} \\
&= (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) \wedge \vec{w} + (\vec{u} \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{w} \\
&= (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) \wedge \vec{w} \\
&= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle \vec{u} \\
&= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle \vec{u} + \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{u} - \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{u} \\
&= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle \vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w} \rangle \vec{u} \\
&= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}.
\end{aligned}$$