Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 12

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Synthèse des résultats sur la forme normale de Jordan.

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice et $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sa forme normale de Jordan. Appelons un bloc de Jordan ayant λ sur sa diagonale un bloc *associé* à λ. Alors

1. Les blocs de J sont associés aux valeurs propres de A.
2. La somme des tailles des blocs associés à la même valeur λ est égale à la multiplicité algébrique de λ.
3. Le nombre de blocs associés à la même valeur λ est égal à la multiplicité géométrique de λ.
4. La taille du plus gros bloc de Jordan associé à λ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de A.
5. La forme normale de Jordan est unique à ordre des blocs près.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer, à l'aide de l'exercice précédent, que A est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal n'admet que des racines simples (c'est-à-dire leur multiplicité est 1).

En déduire que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vérifie $A^3 = A$, alors A est diagonalisable.

Exercice 3. Relire et compléter la preuve du théorème de Jordan.

1. Montrer que les orbites de
$$x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_\ell$$
engendrent encore V. (cf. démonstration du théorème de Jordan pour leur définition).

2. Pourquoi applique-t-on N à la combinaison linéaire autant de fois que possible ? Si $k \geq 2$, trouver à quoi ressemble la combinaison linéaire et le vecteur y' qui remplace x_i si on applique N seulement $k-1$ fois. Argumenter, dans ce cas, que y' a une durée de vie inférieure à y, mais que les orbites ne génèrent pas forcément le même espace.

3. Montrer que si $m = \min_{j \in J} m_j - 1 = 0$, et donc qu'aucun progrès n'est réalisé dans le cas 2, le cas 1 s'applique : il existe un i tel que $Nx_i = 0$, et tel que le coefficient devant x_i dans la combinaison linéaire est non nul.

Exercice 4. Donner la forme normale de Jordan J de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer l'unicité de la forme normale de Jordan.

1. Considérons d'abord un bloc de Jordan $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associé à la valeur propre λ. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$rang(B - \lambda I)^m = \max\{n - m, 0\}.$$

2. Considérons à présent une matrice J construite à partir de blocs de tailles $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$ et associés à la même valeur propre λ. Soit m_i le nombre de blocs de taille n_i. Montrer que

$$rang(J - \lambda I)^m = \sum_{i=1}^{k} m_i \max\{n_i - m, 0\}. \tag{1}$$

3. Montrer que si A and B sont semblables, alors $rang((A - \lambda I)^m) = rang((B - \lambda I)^m)$. Déduire que si A and B sont semblables, et que si leur seule valeur propre est λ, alors leurs formes normales de Jordan sont identiques à ordre des blocs près.

Indice : évaluer (1) *en* $m = n_1, n_1 - 1, n_2, n_2 - 1, \ldots$.

4. En considérant chaque valeur propre une à une, conclure de l'unicité de la forme normale de Jordan à ordre des blocs près.

Exercice 6. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

a) Si J est la forme normale de Jordan pour une matrice A, J^2 est la forme normale de Jordan pour A^2.

b) Si A et B sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n \times n}$, les matrices AB et BA ont les mêmes formes normales de Jordan.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle qu'il existe un $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^m = I$. Montrer que A est inversible, expliciter ses valeurs propres, et en déduire que $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$.

Exercice 8. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m est diagonalisable pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

Donner un contre-exemple lorsque A n'est pas inversible.