Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 12 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Synthèse des résultats sur la forme normale de Jordan.

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice et $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sa forme normale de Jordan. Appelons un bloc de Jordan ayant λ sur sa diagonale un bloc *associé* à λ. Alors

1. Les blocs de J sont associés aux valeurs propres de A.
2. La somme des tailles des blocs associés à la même valeur λ est égale à la multiplicité algébrique de λ.
3. Le nombre de blocs associés à la même valeur λ est égal à la multiplicité géométrique de λ.
4. La taille du plus gros bloc de Jordan associé à λ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de A.
5. La forme normale de Jordan est unique à ordre des blocs près.

Solution.

1. *Exercice 6, série 11.*
2. *Exercice 7, série 11 (et vu en cours).*
3. *Exercice 8, série 11.*
4. *Exercice 7, série 11.*
5. *Exercice 5, série 12.*

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer, à l'aide de l'exercice précédent, que A est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal n'admet que des racines simples (c'est-à-dire leur multiplicité est 1).

En déduire que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vérifie $A^3 = A$, alors A est diagonalisable.

Solution. *D'après le point 4 de l'exercice 1, la multiplicité d'une valeur propre* λ *dans le polynôme minimal donne la taille du plus gros bloc associé à cette valeur.*

Par conséquent, chaque bloc est de taille 1 *dans la forme de Jordan de* A*. Celle-ci est donc une matrice diagonale, et* $A = PJP^{-1}$ *donne exactement la diagonalisation de* A*.*

Dans le cas où $A^3 = A$*, le polynôme* $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ *annule* A*. Le polynôme minimal de* A *divise donc* $x^3 - x$*, et ses racines doivent également être simples.*

Exercice 3. Relire et compléter la preuve du théorème de Jordan.

1. Montrer que les orbites de
$$x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_\ell$$
engendrent encore V. (cf. démonstration du théorème de Jordan pour leur définition).

2. Pourquoi applique-t-on N à la combinaison linéaire autant de fois que possible ? Si $k \geq 2$, trouver à quoi ressemble la combinaison linéaire et le vecteur y' qui remplace x_i si on applique N seulement $k-1$ fois. Argumenter, dans ce cas, que y' a une durée de vie inférieure à y, mais que les orbites ne génèrent pas forcément le même espace.

3. Montrer que si $m = \min_{j \in J} m_j - 1 = 0$, et donc qu'aucun progrès n'est réalisé dans le cas 2, le cas 1 s'applique : il existe un i tel que $Nx_i = 0$, et tel que le coefficient devant x_i dans la combinaison linéaire est non nul.

Solution. *1. Rappelons que*
$$x_i = \frac{1}{\gamma_i} y - \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in J, j \neq i} \gamma_j N^{m_j - 1 - m} x_j.$$
Ainsi, pour tout élément $N^p x_i$ *de l'orbite de* x_i*, on a*
$$N^p x_i = \frac{1}{\gamma_i} N^p y - \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in J, j \neq i} \gamma_j N^{m_j - 1 - (m-p)} x_j.$$
Ceci implique que tout élément qui est une combinaison linéaire des éléments des orbites de $x_1, \dots, x_l$ *peut être écrit comme combinaison linéaire des éléments des orbites de*
$$x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_l.$$

2. Après avoir appliqué N le plus de fois possible (k fois), on trouve, pour un certain x_i *de durée de vie* $k+1$*,*
$$N^k \left(\gamma_i x_i + \sum_{j \in J, j \neq i} \gamma_j N^{m_j - 1 - k} x_j \right) = 0,$$

d'où notre définition $y := \gamma_i x_i + \sum_{j\in J, j\neq i} \gamma_j N^{m_j-1-k} x_j$*, de durée de vie* k*.*

D'autre part, appliquer $k-1$ *fois* N *donne*

$$N^{k-1}\left(\gamma_i x_i + \sigma_i N x_i + \sum_{j\in J, j\neq i} \gamma_j N^{m_j-1-m} x_j\right) = 0,$$

pour un certain $\sigma_i \neq 0$*.*

Nous serions donc tenté de définir $y' := \gamma_i x_i + \sigma_i N x_i + \sum_{j\in J, j\neq i} \gamma_j N^{m_j-1-m} x_j$*, la durée de vie de* y' *étant* $k-1$*.*

Or dans ce cas, la justification de la question 1 ne tient plus : on ne peut pas écrire x_i *comme combinaison linéaire de* y' *et d'éléments des orbites de* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_l$*.*

Question ouverte : l'élément $N^k x_i$ *est-il quand même toujours dans l'espace généré par les orbites ?*

3. *Dans cette situation, on ne peut pas factoriser par une puissance de* N*, ni réappliquer* N *car tous les termes deviennent nuls.*

   La première assertion implique qu'un x_i *apparaît dans la combinaison linéaire avec un coefficient non nul. La deuxième donne* $Nx_i = 0$*. Ceci correspond exactement au cas 2.*

Exercice 4. Donner la forme normale de Jordan J de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution. *On commence par trouver les valeurs propres de* A*. On a que le polynôme caractéristique de* A *est*

$$p_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

donc la forme normale de Jordan de A *est*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ou \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La multiplicité géométrique de $\lambda = 2$ *est* 1*, donc* A *n'est pas diagonalisable et la forme normale de Jordan* J *est* $J = J_2$*.*

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer l'unicité de la forme normale de Jordan.

1. Considérons d'abord un bloc de Jordan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ associé à la valeur propre λ. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$rang(B-\lambda I)^m = \max\{n-m, 0\}.$$

2. Considérons à présent une matrice J construite à partir de blocs de tailles $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$ et associés à la même valeur propre λ. Soit m_i le nombre de blocs de taille n_i. Montrer que

$$rang(J - \lambda I)^m = \sum_{i=1}^{k} m_i \max\{n_i - m, 0\}. \tag{1}$$

3. Montrer que si A and B sont semblables, alors $rang((A - \lambda I)^m) = rang((B - \lambda I)^m)$. Déduire que si A and B sont semblables, et que si leur seule valeur propre est λ, alors leurs formes normales de Jordan sont identiques à ordre des blocs près.

Indice : évaluer (1) *en* $m = n_1, n_1 - 1, n_2, n_2 - 1, \ldots$.

4. En considérant chaque valeur propre une à une, conclure de l'unicité de la forme normale de Jordan à ordre des blocs près.

Solution. *1.* $B - \lambda I$ *est de la forme* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Chaque puissance de $B - \lambda I$ *fait monter la diagonale et diminue le rang de* 1, *jusqu'à ce que* $(B - \lambda I)^n = 0$. *Ainsi* $(B - \lambda I)^k = 0$ *pour tout* $k \geq n$, *et la formule est vérifiée.*

2. On utilise l'égalité suivante : $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

La relation découle donc naturellement de la question 1, car si $A = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_N \end{pmatrix}$,

alors $A^m = \begin{pmatrix} B_1^m & & & \\ & B_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_N^m \end{pmatrix}$.

3. Si A *et* B *sont semblables, il existe une matrice* P *inversible telle que* $A = PBP^{-1}$.

Par conséquent, les matrices $(A - \lambda I)^m$ *et* $(B - \lambda I)^m$ *sont également semblables, car*

$$(A - \lambda I)^m = (PBP^{-1} - \lambda PP^{-1})^m = \left(P(B - \lambda I)P^{-1}\right)^m.$$

Leurs rangs sont donc égaux, car leurs images sont isomorphes : P^{-1} *définit un isomorphisme de* $Im(A) \to Im(BP^{-1}) = Im(B)$.

En conclusion, les valeurs $\operatorname{rang}(A - \lambda I)^m$ *sont* invariantes *par changement de base. L'évaluation successive proposée en indice permettra de déduire que les quantités* $m_1, \ldots, m_k$ *et* $n_1, \ldots, n_k$ *sont également des invariants. Il suivra* *naturellement que, dès que deux formes de Jordan J_1 et J_2 sont semblables, elles auront le même nombre de blocs de même tailles. Les J_1 et J_2 seront donc égales, à ordre des blocs près.*

En évaluant (1) *en* $m = n_1$ *et* $m = n_1 - 1$, *on a que*

$$\operatorname{rang}(A - \lambda I)^{n_1} = 0, \text{et} \qquad \qquad \mathrm{rang(J - \lambda I)^{n_1 - 1} = m_1}.$$

L'entier n_1 est donc invariant car c'est le premier entier n tel que $\operatorname{rang}(A - \lambda)^n = 0$, *et m_1 l'est également par la seconde égalité.*

En évaluant (1) *en $m = n_1 - 2$, on obtient le m_1 plus le nombre de blocs de taille $n_1 - 1$. S'il n'existe pas de blocs de taille $n_1 - 1$, on obtient donc simplement m_1. Le rang agit linéairement en m_1 jusqu'à ce qu'un bloc de taille inférieure apparaisse. Par conséquent, en diminuant la puissance successivement, on peut déduire la valeur de n_2 : c'est le plus petit entier $n < n_1$ tel que*

$$\operatorname{rang}(A - \lambda I)^n = (n_1 - n) \cdot m_1.$$

En évaluant (1) *en $m = n_2 - 1$, on a que*

$$\operatorname{rang}(J - \lambda I)^{n_2 - 1} = m_1(n_1 - n_2 + 1) + m_2.$$

L'entier m_2 est donc invariant car m_1, n_1 et n_2 le sont.

Chaque paire d'évalutations donne que n_i est invariant, puis que m_i l'est aussi, pour $i = 1, \ldots, k$.. C'est ce qu'il fallait démontrer.

4. *Pour λ une valeur propre de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, on écrit sa forme normale de Jordan J sous la forme $J = \begin{pmatrix} J_\lambda & \\ & R \end{pmatrix}$, où J_λ est constituée des blocs associés à λ, et la matrice R regroupe le reste des blocs.*

   Notons r la dimension de R, et remarquons que c'est un invariant par changement de base. En effet, la dimension de J est égale à la multiplicité algébrique $m_{\text{alg}}(\lambda)$ de λ, invariante car le polynôme caractéristique l'est. D'où $r = n - m_{\text{alg}}(\lambda)$ est également un invariant.

   Soustraire λI à J agit alors sur J_λ, et rend R inversible. En fait, on a toujours $\operatorname{rang}(R - \lambda I)^m = r$ *(la matrice est triangulaire supérieure avec éléments diagonaux non nuls : son déterminant est non nul).*

   Par conséquent, les quantités $\operatorname{rang}(J_\lambda - \lambda I)^m = \operatorname{rang}(J - \lambda I)^m - r$ *sont invariants par changement de base. La justification de la question 3 permet alors de conclure ; la taille des blocs associés à λ et le nombre de blocs de chaque taille sont invariants par changement de base.*

   Si une matrice A admet deux formes normales de Jordan J_1 et J_2, elles doivent être semblables par transitivité. Par conséquent, la taille des blocs et le nombre de blocs de chaque taille sont les mêmes : les deux matrices sont les mêmes, à permutation des blocs près.

Exercice 6. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

a) Si J est la forme normale de Jordan pour une matrice A, J^2 est la forme normale de Jordan pour A^2.

b) Si A et B sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n\times n}$, les matrices AB et BA ont les mêmes formes normales de Jordan.

Solution.

a) *Faux. Soit J une matrice en forme de Jordan. On a que J^2 n'est pas nécessairement une matrice en forme de Jordan. Par exemple si*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on voit clairement que J^2 n'est pas en forme de Jordan.

b) *Faux. La multiplication n'est pas commutative. Par exemple on peut considérer*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

AB et BA sont deux matrices en forme de Jordan différentes.

Remarquons que les polynômes caractéristiques de AB et de BA sont identiques, mais pas les polynômes minimaux.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle qu'il existe un $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^m = I$. Montrer que A est inversible, expliciter ses valeurs propres, et en déduire que $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$.

Solution. *Le polynôme minimal de A divise $x^m - 1$, dont les racines sont les m-èmes racines de l'unité $e^{2\pi ik/m}$, $k = 0, \dots, m-1$. Les racines du polynômes minimal de A sont donc des racines m-èmes de l'unité. Celui-ci divisant le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A doivent également être des racines m-èmes de l'unité.*

Notons au passage de A est inversible, car elle n'admet pas 0 comme valeur propre. De plus,

$$p_{car,A}(x) = \det(A - xI) = \det(A)x^n \det(\frac{1}{x}I - A) = \pm \det(A)x^n p_{car,A^{-1}}(1/x).$$

Les valeurs propres de A^{-1} sont donc l'inverse des valeurs propres de A, avec multiplicités algébriques égales.

Le résultat est donc une conséquence du fait que $\overline{e^{2\pi ik/m}} = \left(e^{2\pi ik/m}\right)^{-1}$, et que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres.

Exercice 8. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m est diagonalisable pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

Donner un contre-exemple lorsque A n'est pas inversible.

Solution. *En classe.*