Prof. Friedrich Eisenbrand 02 juin 2023

---

**Algèbre linéaire avancée II**
printemps 2023

---

**Série 13**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1.** (+)
Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Posons le *polynôme minimal de* $A$ le polynôme de degré minimal de $\mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ unitaire et qui annule $A$.

1. Montrer qu'il existe et qu'il est bien unique.
2. Montrer qu'il divise tout polynôme annulant $A$ et donc, en particulier, le polynôme caractéristique de $A$.

**Exercice 2.** Soit $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ telle que $B = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\det(B) \neq 0$. Posons $\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{n} \|b_i\|}{\det(B)}$.
Montrer que si $v = Bx$, $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ est un vecteur le plus court de $\mathrm{Im}_{\mathbb{Z}}(B) = B \cdot \mathbb{Z}^n$, alors $\|x\|_\infty \leq \alpha$.
*Indice :* la règle de Cramer stipule que la solution du système $Bx = v$ vérifie $x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)}$, où $B_i$ est la matrice carrée formée en remplaçant la $i$-ième colonne de $B$ par $v$.

**Exercice 3.** Soit $V = \mathbb{F}_3^3$ muni de la forme bilinéaire standard. Soit $W = \mathrm{span}\{(1, 1, 1)^T\}$.

*i)* Montrer que $W \subseteq W^\perp$.

*ii)* Montrer qu'il existe $0 \neq u \in V \setminus (W + W^\perp)$.

Cela montre que pour une forme bilinéaire non-dégénérée, on a pas nécessairement $W \oplus W^\perp = V$.

**Exercice 4.** Question ouverte 2022.
Soit $F$ un corps et $f \in F[x]$ de degré $n \geq 1$. Montrer la proposition suivante.
$f$ est irrréductible sur $F$ si et seulement s'il n'existe aucune paire de polynômes $(p, q) \in F[x] \times F[x]$ non nuls vérifiant $deg(p) < n$, $deg(q) < n$, et $f | pq$.

**Exercice 5.** Soient $m$ points $(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, m$ dans $\mathbb{R}^2$. Cherchons le meilleur polyôme de degré $d$ approximant ces points ($d < m$).

$$f^* = \arg \min_{\deg(f)=d} \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - y_i|^2.$$

1. Rappeler la forme de la matrice de Vandermonde $V \in \mathbb{R}^{m\times(d+1)}$ associée aux valeurs $x_1, \dots, x_m$.
2. Réécrire le problème en un problème des moindres carrés du type
$$x^* = \arg \min_{x\in\mathbb{R}^{d+1}} ||Vx - y||_2^2.$$
3. Trouver la meilleur droite approximant les points $(0, 0), (1, -1), (2, 3)$, et $(-1, 1)$.

**Exercice 6.** Soit $A$ une matrice hermitienne. Montrer que la décomposition du théorème spectral $A = PDP^*$, où $P$ est unitaire, implique que

$$A = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda,$$

où $P_\lambda$ est la projection sur l'espace propre $E_\lambda$ et la somme est prise sur toutes les valeurs propres distinctes de $A$.

**Exercice 7.** Soit $T : \mathbb{C}^{12} \to \mathbb{C}^{12}$ un endormorphisme admettant pour polynômes caractéristique et minimal

$$p_{\text{car},T}(x) = (x-6)^4(x+3)^6x^2, \qquad p_{\min,T}(x) = (x-6)^2(x+3)^3x.$$

Montrer qu'il n'existe que 6 tels endormorphismes à conjugaison par isomorphisme près ($\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ sont considérés comme la même application pour $\phi$ un automorphisme de $\mathbb{C}^{12}$)

**Exercice 8.** Calculer les polynômes caractéristique et minimal de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $1, 2, -3$. En déduire sa forme normale de Jordan.