EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Révision et suppléments	

Révision.

Exercice 1 (Propriétés élémentaires des anneaux). 1. Trouver un anneau fini non-commutatif.

2. Donner un exemple anneau commutatif qui possède exactement deux idéaux premiers avec un non maximal.

3. Soit $n \geq 1$. Donner un exemple d'anneau commutatif avec exactement $2n$ idéaux premiers, dont n premiers non-maximaux.

4. Montrer qu'un élément $a \in A$ d'un anneau commutatif est dans l'intersection de tous les idéaux maximaux si et seulement si pour tout $b \in B$ on a $1 - ab \in A^{\times}$.

5. Montrer qu'un anneau commutatif a un unique idéal maximal si et seulement si $A \setminus A^{\times}$ est un idéal.

6. Expliciter en termes de produits d'anneaux avec un unique idéal maximal (des corps finis dès que possible) les quotients
$$\mathbb{Z}[i]/(30) \quad \mathbb{Z}[\sqrt{3}]/(105) \quad \mathbb{Z}[\sqrt[3]{7}]/(210).$$

7. Quel anneau A à la propriété que pour tout anneau B qu'il existe un unique morphisme $A \to B$?

8. Quel anneau à la propriété que pour tout anneau B il existe un un unique morphisme $B \to A$?

9. Quel anneau commutatif A avec un élément $a \in A$ à la propriété que pour tout anneau commutatif B et $b \in B$ il existe un unique morphisme tel $\phi : A \to B$ tel que $\phi(a) = b$?

Exercice 2 (Propriétés arithmétique des anneaux).
Soit A un anneau intègre. Soit $a \in A$.

1. Montrer que
$$(a) \text{ maximal} \implies (a) \text{ premier} \iff a \text{ premier} \implies a \text{ irréductible}$$
et donner des contre exemples pour démontrer que chaque implication n'est pas une équivalence.

2. Montrer que
$$A \text{ Euclidien} \implies A \text{ principal} \implies A \text{ factoriel}$$
et donner un anneau factoriel et non principal. Pour un exemple d'anneau principal non Euclidien
$$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right].$$
Ce n'est pas si simple de le montrer. Une preuve élémentaire ici.

3. Pour chacune des propriétés d'anneaux du point (2), ré-examiner les implications du point (1) : lesquelles deviennent des équivalences ?

Exercice 3 (Critères d'irréductibilité).
Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles.

1. $t^{2027} + 105t^{2002} + 90 \in \mathbb{Z}[t]$
2. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ des nombres impairs. $t^i + at + b \in \mathbb{Z}[t]$ pour $i = 2, 3$.
3. $Y^2 - (X^3 + X + 1) \in \mathbb{Z}[X, Y]$.
4. Soit k un corps, $\mathrm{car}(k) \neq 3$. $Y^2 - (X^3 + 1) \in k[X, Y]$.

Exercice 4 (Corps).
Soit K un corps.

1. Montrer que pour une extension de degré fini L de K on a
$$L \text{ est un corps de décomposition d'un polynôme } f \iff \forall \alpha \in L,\ m_{\alpha,K} \text{ scinde sur } L.$$
2. Montrer que pour une extension finie L de K on a
$$L \text{ est générée par des éléments séparables} \iff L \text{ est générée par un élément séparable}$$
$$\iff L \text{ est séparable.}$$
3. Donner des exemples d'extensions de degré fini L
   (a) non-séparables,
   (b) séparables mais qui ne sont pas un corps de décomposition.
4. Soit k un corps fini. Combien de sous-corps k a-t-il ? Pour chaque sous-corps l, trouver un automorphisme σ de k avec $k^\sigma = l$.
5. Calculer les polynômes minimaux sur $\mathbb{Q}$ de
$$1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt{2}\sqrt[3]{3}, \quad i\xi_3, \quad i + \xi_3$$
si ξ_3 est une racine primitive 3-ième de l'unité.
6. Calculer le polynôme minimal de $\sqrt[n]{\frac{1+\sqrt{t}}{t}}$ sur $\mathbb{C}(t)$.

Exercice 5 (Théorie de Galois).
1. Pour chaque n, trouver un corps K (au moins un exemple en caractéristique nulle) et une extension finie L galoisienne tel que $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Pour vos exemples trouvés au point précédent donner toutes les extensions intermédiaires ainsi qu'un générateur de ces extensions.
3. Si un polynôme séparable de degré n dans $K[t]$ a un corps de décomposition L de degré $n!$, que pouvez dire du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$? Pouvez-vous donner un exemple pour $n = 3$? Donner toutes les extensions intermédiaires ainsi que des générateurs de ces sous-corps pour votre exemple.
4. Trouver une extension galoisienne de degré 3 de $\mathbb{Q}$.

Suppléments.

Exercice 6 ($\star$).
Si K est un corps dénombrable, montrez que $\overline{K}$ est également dénombrable.

Exercice 7 ($\star$).
1. Si $K \subseteq L$ est une extension purement inséparable, alors $\mathrm{Gal}(L/K) = \{\mathrm{Id}_L\}$.
2. Soit $K \subseteq L$ une extension finie tel que
$$[L_{insep,K} : K] |\mathrm{Gal}(L/K)| = [L : K].$$
Montrer que L est séparable sur $L_{insep,K}$.