Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 13 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+)

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Posons le *polynôme minimal de A* le polynôme de degré minimal de $\mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ unitaire et qui annule A.

1. Montrer qu'il existe et qu'il est bien unique.
2. Montrer qu'il divise tout polynôme annulant A et donc, en particulier, le polynôme caractéristique de A.

Solution. *1. Le théorème de Cayley-Hamilton implique que $p_{car,A}(A) = 0$ et donc que le polynôme minimal existe. Soient deux polynômes minimaux p et q de A. En particulier, ils sont unitaires, de même degré, et annulent A. Dès lors, $p - q$ est de degré strictement inférieur et annule également A. Il doit donc être le polyôme nul, et donc $p = q$, ce qui montre l'unicité*

2. Soit $p_{min,A}$ le polynôme minimal de A et f un polynôme quelconque annulant A. La division euclidienne de f par $p_{min,A}$ donne

$$f = p_{min,A}q + r,$$

où $\deg(r) < \deg(p_{min,A})$. Or, en évaluant en A, on trouve $r(A) = 0$, et donc que r doit être le polynôme nul, par minimalité de $p_{min,A}$.

Exercice 2. Soit $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ telle que $B = (b_1, \dots, b_n)$ et $\det(B) \neq 0$. Posons $\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n \|b_i\|}{\det(B)}$.

Montrer que si $v = Bx$, $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ est un vecteur le plus court de $\mathrm{Im}_{\mathbb{Z}}(B) = B \cdot \mathbb{Z}^n$, alors $\|x\|_\infty \leq \alpha$.

Indice : la règle de Cramer stipule que la solution du système $Bx = v$ vérifie $x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)}$, où B_i est la matrice carrée formée en remplaçant la i-ième colonne de B par v.

Solution. *L'inégalité de Hadamard permet de conclure :* $|x_i| \leq \frac{1}{\det(B)} ||v|| \prod_{j\neq i} ||b_j||$. *Comme* v *est supposé court, on a forcément* $||v|| \leq ||Be_i|| = ||b_i||$, *et le résultat suit.*

Exercice 3. Soit $V = \mathbb{F}_3^3$ muni de la forme bilinéaire standard. Soit $W = \text{span}\{(1,1,1)^T\}$.

i) Montrer que $W \subseteq W^\perp$.

ii) Montrer qu'il existe $0 \neq u \in V \setminus (W + W^\perp)$.

Cela montre que pour une forme bilinéaire non-dégénérée, on a pas nécessairement $W \oplus W^\perp = V$.

Solution. *i)* $W = \{(0,0,0)^T, (1,1,1)^T, (2,2,2)^T\}$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = 3ab \equiv 0 \mod 3,$$

alors $\langle w, w' \rangle = 0$ *pour tout* $w, w' \in W$, $W \subseteq W^\perp$.

ii) Observons que

$$W^\perp = \left\{ v \in \mathbb{F}_3^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \mod 3 \right\},$$

car $\langle (a,a,a)^T, (v_1,v_2,v_3) \rangle = a(v_1 + v_2 + v_3)$ *et donc* $v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \mod 3$ *pour* $a \neq 0$. *Ainsi* $(1,1,0)^T \notin W^\perp = W + W^\perp$ *d'après la partie i).*

Exercice 4. Question ouverte 2022.
Soit F un corps et $f \in F[x]$ de degré $n \geq 1$. Montrer la proposition suivante.

f est irréductible sur F si et seulement s'il n'existe aucune paire de polynômes $(p,q) \in F[x] \times F[x]$ non nuls vérifiant $deg(p) < n$, $deg(q) < n$, et $f|pq$.

Solution. $\Longrightarrow$
Par contraposition, supposons qu'il existe une paire $(p,q) \in F[x] \times F[x]$ *telle que* $deg(p) < n$, $deg(q) < n$, *et* $f|pq$.

Remarquons que les conditions sur les degrés et le fait que f *divise* pq *impliquent que* p *est soit nul, soit non constant. Choisissons un polynôme* p *de degré minimal mais non nul pour cette propriété et montrons que* p *divise* f.

Par division euclidienne, $f = ps + r$, *où* $deg(r) < deg(p)$. *En multipliant par* q, *on trouve*

$$qr = qf - (pq)s.$$

f *divise donc le produit* qr. *Or comme le* r *est de degré inférieur à celui de* p *et* p *a été choisi non nul de degré minimal, le reste* r *doit être nul. Il suit que* p *divise* f *et n'est pas constant, et donc que* f *est réductible.*

$\Longleftarrow$

Montrons à nouveau la contraposée. Supposons que f *soit réductible. Il existe donc un couple* (p,q) *de degrés chacun au moins 1 tels que* $f = pq$. *L'égalité* $deg(p) + deg(q) = n$ *donne* $deg(p) < n$ *et* $deg(q) < n$, *et la condition* $f|pq$ *est trivialement vérifiée.*

Exercice 5. Soient m points (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ dans $\mathbb{R}^2$. Cherchons le meilleur polyôme de degré d approximant ces points $(d < m)$.

$$f^* = \arg \min_{\deg(f) \leq d} \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - y_i|^2.$$

1. Rappeler la forme de la matrice de Vandermonde $V \in \mathbb{R}^{m \times (d+1)}$ associée aux valeurs $x_1, \ldots, x_m$.

2. Réécrire le problème en un problème des moindres carrés du type

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^{d+1}} ||Vx - y||_2^2 .$$

3. Trouver la meilleur droite approximant les points $(0, 0), (1, -1), (2, 3)$, et $(-1, 1)$.

Solution. *1. Posons* $V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \ldots & x_m^d \end{pmatrix}$.

2. Si $f(x) = \alpha_0 + \cdots + \alpha_d x^d$, *on ait*

$$f(x_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & \ldots & x_i^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix},$$

pour chaque $i = 1, \ldots, m$.

Par suite, nous avous posé V *de telle sorte que le vecteur* $V\alpha - y$ *admet pour coordonnées* $f(x_i) - y_i, i = 1, \ldots, m$, *et*

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - y_i|^2 = ||V\alpha - y||_2^2 .$$

Résoudre le problème initial pour f *revient donc à résoudre le problème des moindres carrés ci-dessus pour les coefficients* $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$ *de* f.

3. Dans ce cas, la matrice V *et le vecteur* y *prennent la forme*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résoud le système par exemple en résolvant $V^T V\alpha = V^T y$, *qui est équivalent à*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on obtient $\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *et donc* $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit A une matrice hermitienne. Montrer que la décomposition du théorème spectral $A = PDP^*$, où P est unitaire, implique que

$$A = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda},$$

où P_λ est la projection sur l'espace propre E_λ et la somme est prise sur toutes les valeurs propres distinctes de A.

Solution. *On se rappelle que les colonnes de P sont des vecteurs propres de A : $P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$.*

Dès lors, la décomposition $A = PDP^*$ s'exprime de la façon suivante.

$$A = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^* \\ \vdots \\ p_n^* \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i p_i^*.$$

Posons désormais λ une valeurs propre de A et $p_1, \dots, p_k$ les vecteurs propres orthonormaux associés.

Ces vecteurs forment une base orthonormale de l'espace propre E_λ. Comme vu en cours, la projection orthogonal d'un vecteur quelconque v sur E_λ est

$$P_\lambda(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, p_i \rangle \, p_i,$$

où $\langle u, v \rangle = u^T \bar{v}$ est le produit scalaire usuel. Attention donc à l'ordre de v et p_i dans l'expression ci-dessus, car le produit scalaire est hermitien, et non symétrique ici.

Par suite, comme $\langle v, p_i \rangle = \overline{\langle p_i, v \rangle} = p_i^* v$, on obtient

$$P_\lambda(v) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i p_i^* \right) v,$$

ce qui permet de conclure que $P_\lambda = \sum_{p_i \text{ associé à } \lambda} p_i p_i^*$, et que $A = \sum_{\lambda \text{ distincts}} \lambda P_\lambda$.

Exercice 7. Soit $T : \mathbb{C}^{12} \to \mathbb{C}^{12}$ un endormorphisme admettant pour polynômes caractéristique et minimal

$$p_{\mathrm{car},T}(x) = (x-6)^4 (x+3)^6 x^2, \qquad p_{\mathrm{min},T}(x) = (x-6)^2 (x+3)^3 x.$$

Montrer qu'il n'existe que 6 tels endormorphismes à conjugaison par isomorphisme près ($\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ sont considérés comme la même application pour ϕ un automorphisme de $\mathbb{C}^{12}$)

Solution. *Il s'agit ici de compter le nombre de formes normales de Jordan possibles, sans compter les permutations entre blocs.*

Les blocs associés à la valeur 6 vérifient que : la somme de leurs tailles est 4 ; le plus gros bloc est de taille 2. Les deux seules possibilités pour les tailles des blocs sont donc $4 = 2 + 2$ et $4 = 2 + 1 + 1$.

Similairement, les trois possibilités pour 3 sont : $6 = 3+1+1+1$, $6 = 3+2+1$, et $6 = 3 + 3$.

Il n'y a qu'une possibilité d'agencement des blocs associés à 0 ($2 = 1 + 1$), et donc le nombre de formes normales de Jordan différentes est $2 \times 3 \times 1 = 6$.

Exercice 8. Calculer les polynômes caractéristique et minimal matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $1, 2, -3$. En déduire sa forme normale de Jordan.

Solution. *En développant par la dernière colonne, le polynôme caractéristique p_A de A est*

$$p_A(\lambda) = \lambda^8 + 2\lambda^7 - 17\lambda^6 - 16\lambda^5 + 115\lambda^4 - 22\lambda^3 - 279\lambda^2 + 324\lambda - 108.$$

Des divisions successives par $\lambda - 1$ donnent le produit $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda^5 + 5\lambda^4 - 5\lambda^3 - 45\lambda^2 + 108)$, et de nouvelles divisions par $\lambda + 3$ et $\lambda - 2$ donnent $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+3)^3(\lambda-2)^2$. Par conséquent, les valeurs $1, 2$, et -3 ont pour multiplicité algébrique $3, 2$ et 3 respectivement.

Pour connaître la décomposition de Jordan et le polynôme minimal, il s'agit d'abord de calculer la multiplicité géométrique de chaque valeur. Or on remarque immédiatement que $rang(A - \lambda I) = 7$ pour $\lambda = 1, 2, -3$, et donc que les multiplicités géométriques sont toutes 1. La forme de Jordan est donc composée de trois blocs diagonaux, chacun associé à une des valeurs propres. De plus, le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$