Corrigé Test 6 - Géométrie 15.06.22

Le test dure 45 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée.

Exercice 1. *(8 points)*

a) Est-ce que la famille $g_t(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + (t+1)\overrightarrow{x}$ pour $t \in [0,1]$ définit un mouvement ?
Non, elle ne définit pas un mouvement car $g_0(t)$ n'est pas l'identité.

b) Déterminer l'excentricité, le centre et les foyers de la conique

$$9x^2 - 4y^2 + 18x + 24y - 63 = 0$$

On complète les carrés :

$$\begin{aligned} 9(x^2+2x) - 4(y^2-6y) - 63 = 0 &\Leftrightarrow 9(x+1)^2 - 4(y-3)^2 - 9\cdot 1 + 4\cdot 9 - 63 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9(x+1)^2 - 4(y-3)^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \end{aligned}$$

On remarque que c'est une hyperbole. On a $a = 2$ et $b = 3$, donc l'excentricité est égale à $e = \sqrt{\frac{9}{4}+1} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.
Le centre se trouve en $(-1;3)$. Les foyers sont à distance $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{13}$ du centre, donc les foyers sont $F(-1 \pm \sqrt{13}; 3)$.

c) Déterminer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que le volume est donné par la formule $| < \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} > |$. On calcule donc $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc $| < \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} > | = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = |-1| = 1.$

Exercice 2. *(18 points)*

On considère la conique d'équation $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 8y + 7 = 0$.

a) De quel type de coniques s'agit-il ? Justifier la réponse par un seul calcul !
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - ac = 2^2 - 3 \cdot 3 = -5 < 0$, donc c'est une ellipse.

b) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle u et v) pour éliminer le terme croisé $4xy$, en explicitant les différentes étapes.
On commence par chercher les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. On trouve facilement qu'il s'agit de 1 et 5. Utilisons la valeur propre 1 dans la suite de l'exercice. Pour faire le changement de variables, il faut trouver une nouvelle base orthonormée formée d'un vecteur propre pour la valeur propre 1. Un exemple de vecteur propre est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, qu'il faut normaliser pour obtenir un vecteur unitaire. On obtient $\overrightarrow{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le deuxième vecteur de la base doit être orthogonal à $\overrightarrow{f_1}$ et unitaire. On choisit par exemple $\overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient alors le changement de variables $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-u+v)$. En remplaçant dans l'équation de base et en simplifiant, on obtient

$$u^2 + 5v^2 - 8\sqrt{2}u + 7 = 0.$$

c) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle X et Y) pour amener l'équation de la conique sous forme canonique.
On complète le carré pour u et on obtient

$$u^2 - 8\sqrt{2}u + 5v^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow (u - 4\sqrt{2})^2 - 32 + 5v^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow (u - 4\sqrt{2})^2 + 5v^2 = 25$$

On pose alors $X = u - 4\sqrt{2}$ et $Y = v$. On remplace dans l'équation et on simplifie pour obtenir l'équation $X^2 + 5Y^2 = 25$. On a donc l'équation canonique $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{5} = 1$, qui est bien l'équation d'une ellipse.

d) Calculer les longueurs d'axe, l'excentricité les foyers et le centre de la conique dans les coordonnées $(X;Y)$.
Déterminer ensuite son centre dans les coordonnées originales.
La dernière équation donne la longueur du grand axe $2a = 2 \cdot 5 = 10$ et du petit axe $2b = 2 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$. Ainsi, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
Le centre se trouve en $(0;0)$. Les foyers se trouvent à distance $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{5}$ du centre, donc en $F(\pm 2\sqrt{5};0)$.
Pour trouver le centre dans les coordonnées originales, on effectue les changements de coordonnées à l'envers, on obtient que le centre de l'ellipse se trouve en $(4;-4)$.

Exercice 3. *(8 points)*

On considère le point $P(1;2)$ et le cercle Γ donné par l'équation $x^2+y^2-6x-8y=0$.

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ.
On complète les carrés et on obtient $(x-3)^2+(y-4)^2-9-16=0$, donc $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.
Le centre du cercle est $(3;4)$ et son rayon vaut 5.

b) Déterminer la puissance de P par rapport au cercle Γ.
On sait que la puissance est donnée par $p(P,\Gamma)=||\overrightarrow{CP}||^2-r^2$. Or, on a $\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $||\overrightarrow{CP}||^2=8$, donc la puissance est égale à $p(P,\Gamma)=8-25=-17$.

c) Déterminer la polaire de P par rapport au cercle Γ.
On sait que la polaire est le lieu géométrique des points M tel que $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CM}=r^2$. Posons $M=(x,y)$. Alors on a

$$\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}=25 \Leftrightarrow -2(x-3)-2(y-4)=25 \Leftrightarrow -2x+6-2y+8=25 \Leftrightarrow 2x+2y+11=0.$$

L'équation de la polaire est donc donnée par la droite verticale $2x+2y+11=0$.