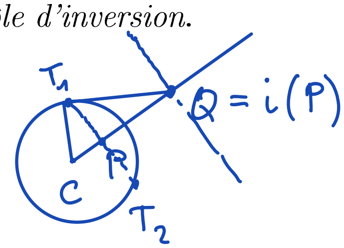
V. Les inversions

1 Les inversions

Dans un cours classique de géométrie, on se restreint souvent à l'étude des transformations du plan (ou de l'espace) qui sont linéaires ou affines, qui préservent les distances ou au moins les rapports de distance. Or, il existe des transformations importantes qui ne sont pas du tout de cette forme, mais qui préservent les angles plutôt que les distances. L'usage des inversions remonte à Poncelet (1788-1867 ; élève de Monge ; prisonnier pendant les guerres napoléoniennes en Russie en 1812, il reprend tous les fondements de la géométrie et met en forme les bases de la géométrie projective, privé de tout livre ! A son retour en France en 1814, il rédige un traité qui sera publié en 1822 et qui aura une grande influence).

Considérons un cercle Γ dans le plan, de centre C et de rayon r. L'inversion est une application du plan (privé de C) dans lui-même qui fixe le cercle et "inverse" l'intérieur et l'extérieur du cercle.

Définition 1.1. L'*inversion* par rapport au cercle Γ est l'application ι qui envoie un point P distinct de C sur le point $\iota(P) = Q$ dans la direction $[CP]$ tel que $||CP|| \cdot ||CQ|| = r^2$. On appelle r le *rapport d'inversion*, le cercle Γ le *cercle d'inversion* et C le *pôle d'inversion*.

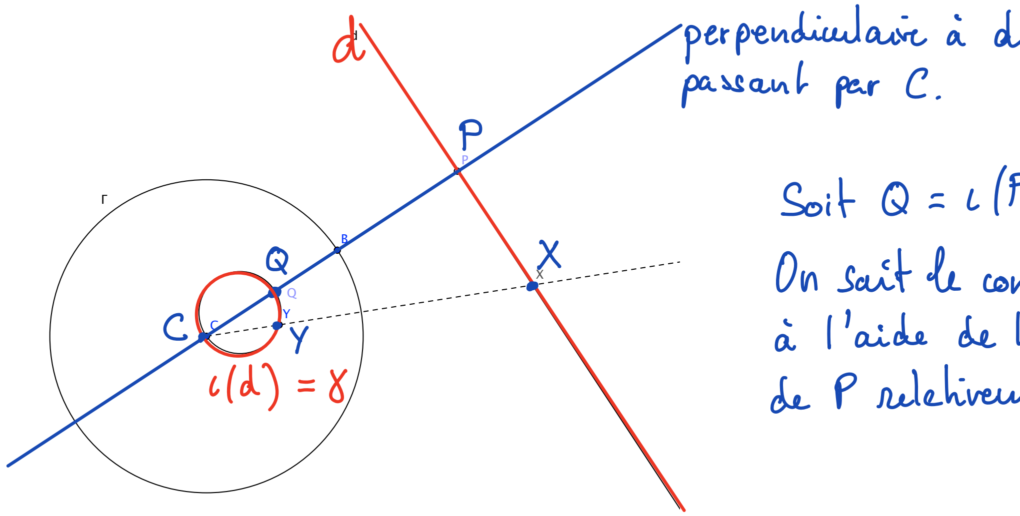


On déduit immédiatement de la définition que
- l'image de P appartient à la polaire de P relativement à Γ,
- les points situés à l'intérieur de Γ sont envoyés à l'exterieur de Γ par ι,
- le cercle Γ est fixe relativement à ι,
- $\iota \circ \iota = Id$. On dit que c'est une involution.

Etudions maintenant l'effet d'une inversion sur les droites et les cercles du plan.

Proposition 1.2. *L'inverse d'une droite passant par le pôle d'inversion est cette même droite, l'inverse d'une droite ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle passant par le pôle. L'inverse d'un cercle passant par le pôle est une droite.*

Démonstration. Par définition l'inverse d'un point d'une droite passant par C reste sur cette droite. Considérons donc une droite d ne passant pas par C. Abaissons la perpendiculaire à d passant par C et soit P le pied de cette perpendiculaire.



Soit $Q = \iota(P)$
On sait le construire à l'aide de la polaire de P relativement à Γ

Nous montrons maintenant que le cercle γ de diamètre CQ est l'image de d.

Soit $X \in d$. On trace la droite CX qui coupe γ en Y. Les triangles CQY et CXP sont semblables car ils ont un sommet commun et tous deux un angle droit.

Thales $\Longrightarrow$ $\dfrac{\|CQ\|}{\|CX\|} = \dfrac{\|CY\|}{\|CP\|} \Longrightarrow$

$\|CY\| \cdot \|CX\| = \|CP\| \cdot \|CQ\| = r^2$. Donc, $\iota(X) = Y$

Et puisque l'inversion est une involution, l'image d'un cercle par C (sans C) est une droite qui ne passe pas par C. □

Même si les inversions transforment des droites en cercles, nous verrons qu'elles préservent les angles ! En fait, il faut voir les inversions comme des généralisations des symétries axiales dans une géométrie où les droites sont considérées comme des cercles de rayon infini. On peut alors effectuer des symétries axiales d'axe circulaire en toute généralité et naturellement les images de cercles sont des cercles, dont le rayon peut être fini ou infini !

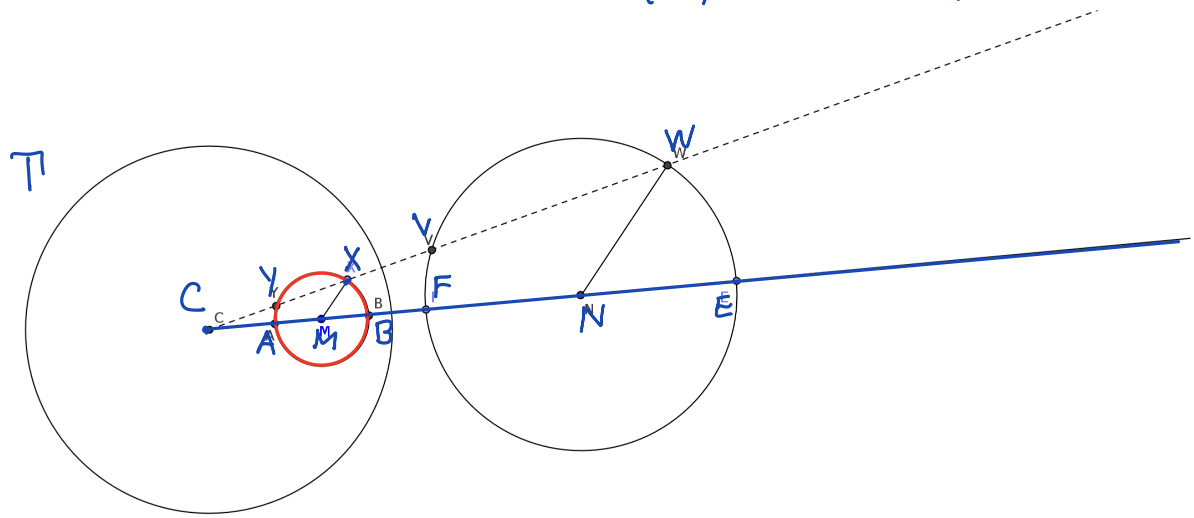
2 Les inversions et les cercles

Nous savons construire l'image par ι d'un cercle qui passe par C, mais nous devons encore résoudre ce problème qui nous tenaille tous : quelle est l'image d'un cercle qui ne passe pas par le pôle d'inversion ?

Proposition 2.1. *L'inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle homothétique du premier par rapport au pôle d'inversion.*

Démonstration. Traçons la demi-droite joignant C au centre M du cercle à inverser. Son intersection avec ce cercle détermine un diamètre $[AB]$. Nous construisons les images $\iota(A) = E$ et $\iota(B) = F$. Nous affirmons que le cercle de diamètre $[EF]$ est l'image du cercle donné.

$F = \iota(B)$ et $E = \iota(A)$



Appelons N le centre de ce cercle et calculons les rapports des rayons ρ et ρ' des cercles de centre M et N. On a

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\|AB\|}{\|FE\|} = \frac{\|CB\| - \|CA\|}{\|CE\| - \|CF\|} = \frac{\|CB\| - \|CA\|}{\frac{r^2}{\|CA\|} - \frac{r^2}{\|CB\|}} = \frac{\|CA\| \cdot \|CB\| \left(\|CB\| - \|CA\|\right)}{\|CB\| \cdot r^2 - \|CA\| r^2} = \frac{\|CA\| \cdot \|CB\|}{r^2}$$

$$\|CA\| \cdot \|CE\| = r^2 = \|CB\| \cdot \|CF\|$$

De même, $$\frac{\|CM\|}{\|CN\|} = \frac{\|CA\| + \|CB\|}{\|CE\| + \|CF\|} = \frac{\|CB\| + \|CA\|}{\frac{r^2}{\|CA\|} + \frac{r^2}{\|CB\|}} = \frac{\|CA\| \cdot \|CB\|}{r^2}$$

Par conséquent, le rapport des rayons des deux cercles est égal au rapport des distances du pôle d'inversion aux centres de ces cercles. Ceci signifie précisément que les cercles sont

homothétiques par rapport au pôle d'inversion.

Gardons cela en mémoire et considérons un point arbitraire X du premier cercle. Traçons la demi-droite issue de C et passant par X. Elle coupe le cercle de centre C en un autre point Y et celui de centre N en deux points V et W. Puisque les cercles sont homothétiques, les triangles ΔCMX et ΔCNW sont semblables, donc

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\|CM\|}{\|CN\|} = \frac{\|MX\|}{\|NW\|} = \frac{\|CX\|}{\|CW\|} \implies \|CX\| = \frac{\rho}{\rho'} \cdot \|CW\|$$

De même, les triangles ΔCMY et ΔCNV sont semblables, donc

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{||MY||}{||NV||} = \frac{||CY||}{||CV||} \implies ||CV|| = ||CY|| \cdot \frac{\rho'}{\rho}$$

Montrons enfin que le produit $||CX|| \cdot ||CV||$ vaut bien r^2. On a

$$||CX|| \cdot ||CV|| = \frac{\rho}{\rho'} \cdot ||CW|| \cdot ||CY|| \cdot \frac{\rho'}{\rho} = ||CY|| \cdot ||CW||$$

Par ailleurs, la puissance de C par rapport au cercle de rayon ρ vaut $||CY|| \cdot ||CX|| = ||CA|| \cdot ||CB||$ (Thm du produit constant), et la puissance de C par rapport au cercle de rayon ρ' vaut $||CV|| \cdot ||CW|| = ||CF|| \cdot ||CE||$.

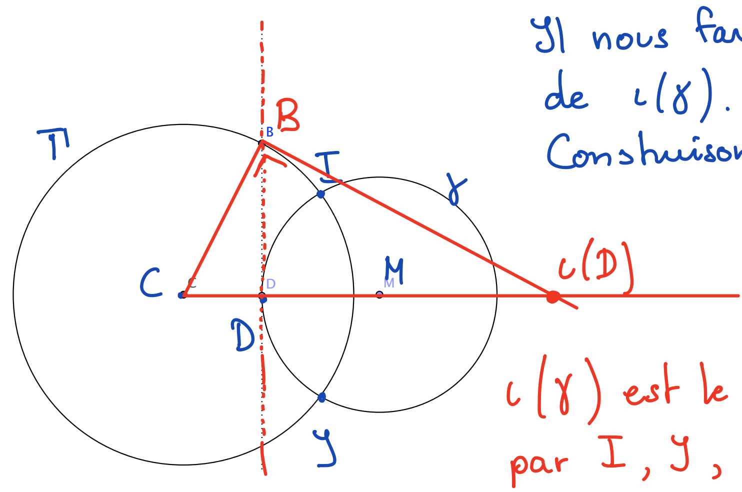
$$\Rightarrow (||CX|| \cdot ||CV||)^2 = (||CX|| \cdot ||CV||)(||CW|| \, ||CY||)$$
$$= ||CA|| \cdot ||CB|| \, ||CF|| \cdot ||CE|| = r^2 \cdot r^2 = r^4$$

□

Remarque 2.2. Nous avons montré que l'image d'un cercle (ne passant pas par le pôle d'inversion) par une inversion est un cercle homothétique. Par contre la preuve montre aussi que l'image par l'inversion du centre M n'est pas le centre N ! Où se trouve l'image de M ? Plus proche de F ou de E ? Plus proche de F car $\iota(MB) < \iota(MA)$

Exemple 2.3. Construisons l'image du cercle γ de centre M par l'inversion par rapport au cercle Γ' de centre C :

I et Y sont des points fixes.
Il nous faut un 3e point de $\iota(\gamma)$.
Construisons $\iota(D)$



$\iota(\gamma)$ est le cercle passant par I, Y, $\iota(D)$.
Puisque CM = médiatrice de IY, il faut construire une 2e méd., par exemple celle de I et $\iota(D)$.

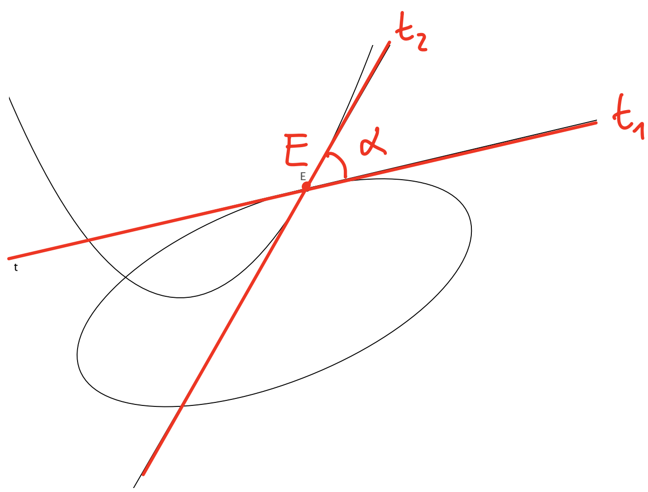
Il y a deux points dont l'image est facile à construire, ce sont les points d'intersection des deux cercles. Pour déterminer l'image du cercle, il suffit donc de construire l'image d'un autre point. Choisissons D sur l'axe CM et traçons la tangente en D. L'image de cette droite est un cercle passant par le pôle. L'intersection de ce nouveau cercle avec l'axe CM donne l'image de D.

3 Les inversions et les angles

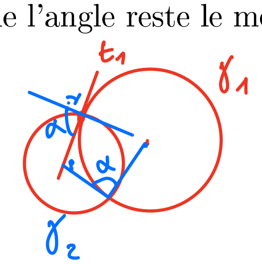
Notre but est de montrer que les inversions préservent les angles. Définissons d'abord en toute généralité ce qu'est l'angle entre deux cercles, deux droites, ou même entre deux courbes (dérivables) du plan.

Définition 3.1. Soit $c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deux courbes dérivables dans le plan qui se coupent en $t = 0$. L'*angle* entre c et d au point $c(0) = d(0)$ est l'angle formé en ce point par les vecteurs tangents aux courbes.

Voici une illustration où l'on voit l'angle en l'un des points d'intersection d'une ellipse et d'une parabole :



Remarquons que l'angle entre deux cercles peut aussi être décrit comme l'angle formé par les rayons respectifs (du centre au point d'intersection). Dans notre étude des inversions nous n'aurons besoin que des angles entre cercles et droites. Il y a plusieurs cas à considérer pour notre étude des angles, mais il suffit d'étudier le cas de l'angle formé par deux droites puisque chaque cercle est remplacé par la droite tangente pour mesurer l'angle. Le premier cas est élémentaire : deux droites passant par le pôle d'inversion sont fixées par l'inversion si bien que l'angle reste le même.

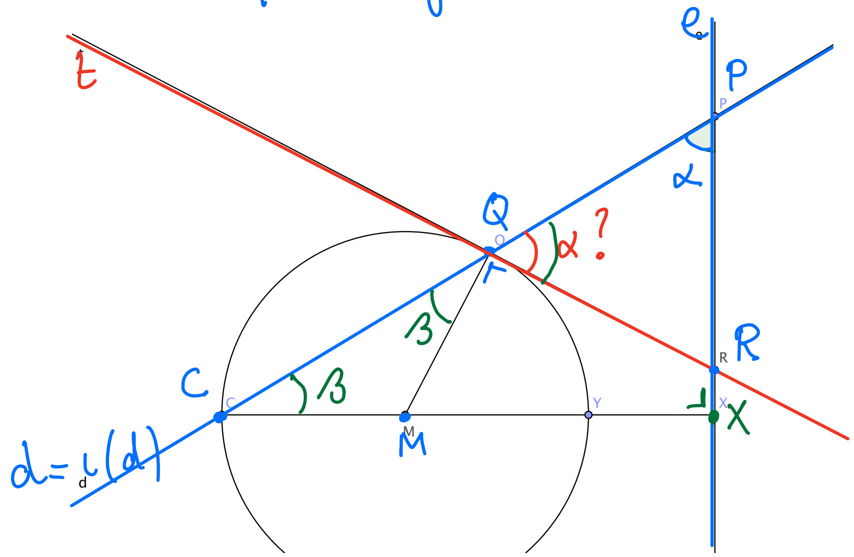


Proposition 3.2. *Soit d une droite passant par le pôle d'inversion C et sécante en un point $P \neq C$ avec une droite e. Alors l'angle formé par la droite d et la droite e est égal à celui formé par d et le cercle $\iota(e)$.* $i(d)$

Démonstration. Construisons d'abord le cercle inverse de e. C'est un cercle qui passe par C
L'image du point $P = e \cap d$ est le point Q d'intersection de $d = \iota(d)$ avec le cercle $\iota(e)$.

Soit t, la tangente à $i(e)$ au point Q.

Nous devons montrer que l'angle entre t et $d = \iota(d)$ vaut α.



Soit R le point d'intersection de t et e. Observons que l'angle formé par le rayon $[MQ]$ et la tangente est un angle droit, si bien que

$$\underbrace{\measuredangle CQM}_{= \measuredangle QCM \text{ car } MC = MQ} + \measuredangle PQR = \frac{\pi}{2}$$

et dans le $\triangle CPX$, rectangle en X ;

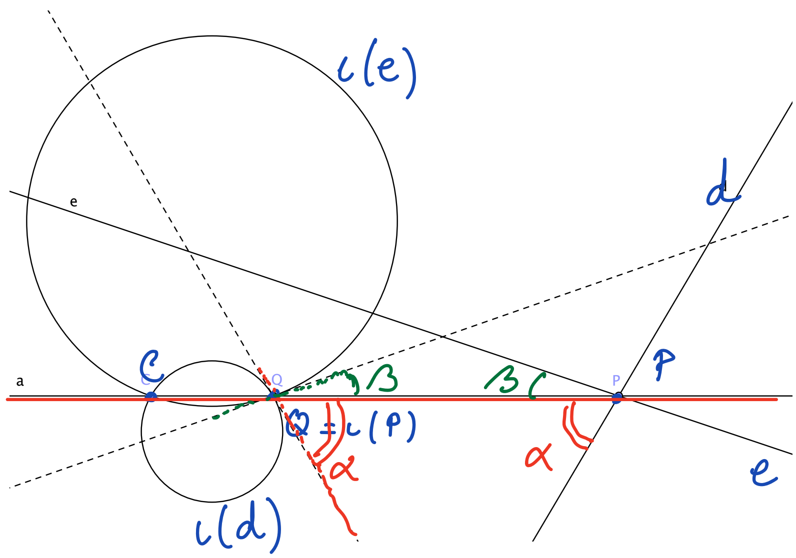
$$\underbrace{\measuredangle PCX}_{= \measuredangle QCM} + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\measuredangle PQR = \alpha$

□

Proposition 3.3. *Soit d et e deux droites ne passant pas par le pôle d'inversion C et sécantes en un point P. Alors l'angle formé par ces droites est égal à celui formé par les cercles $\iota(d)$ et $\iota(e)$.*

Démonstration. Les images de d et e sont deux cercles passant par le pôle d'inversion C. L'image de P est l'autre point d'intersection Q de ces deux cercles.



Introduisons la droite annexe $a = CP$, qui est fixée par l'inversion. Alors les angles en P entre a et d et entre a et e sont préservés par l'inversion (par la proposition précédente). Le résultat est alors immédiat. □

Théorème 3.4. *Les inversions préservent les angles entre droites et cercles.*

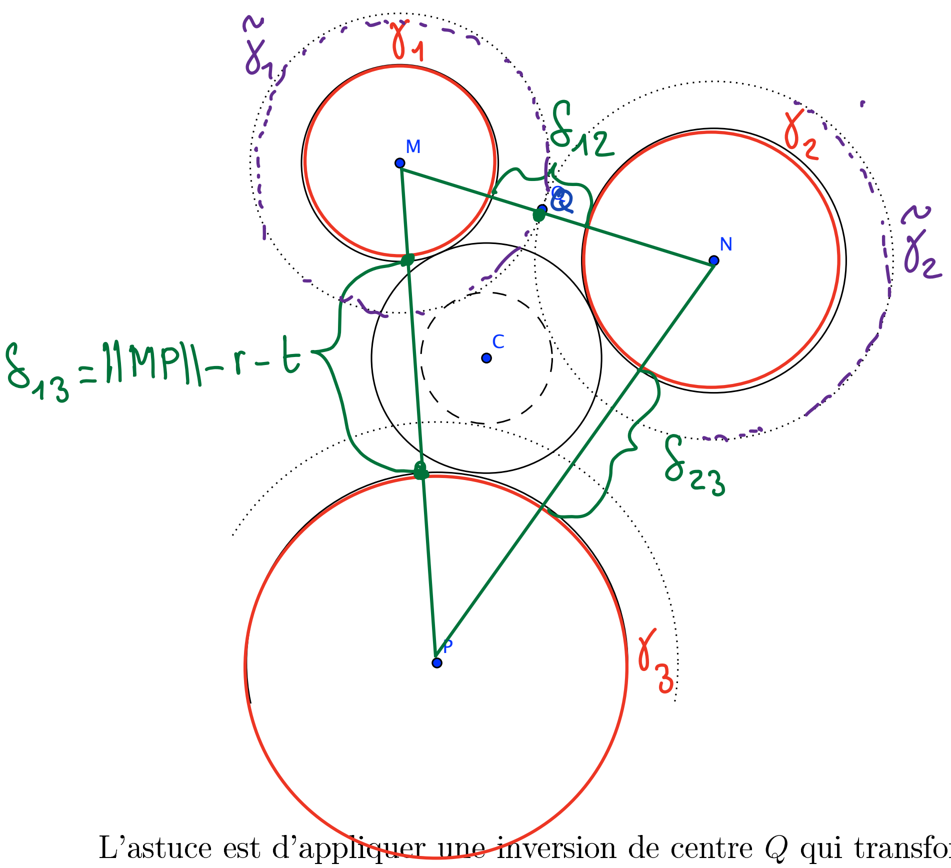
4 Le problème d'Apollonius

Le problème d'Apollonius demande de construire un cercle tangent à trois cercles donnés. La solution utilise le fait qu'il est plus aisé de raisonner avec des droites qu'avec des cercles et c'est là que réside l'avantage des inversions. Avant de commencer, remarquons que la propriété d'être tangent est préservée par inversion puisque deux cercles sont tangents s'ils ont un unique point commun. Pour fixer les idées, supposons que les cercles donnés sont de centres M, N et P et de rayons r, s et t. Supposons ensuite que la plus grande des distances entre deux cercles est celle entre le premier et le troisième $\delta_{13} = ||MP|| - r - t \geq \delta_{23} = ||NP|| - s - t \geq \delta_{12} = ||MN|| - r - s$.

On donne $\gamma_1(M, r)$, $\gamma_2(N, s)$ et $\gamma_3(P, t)$.

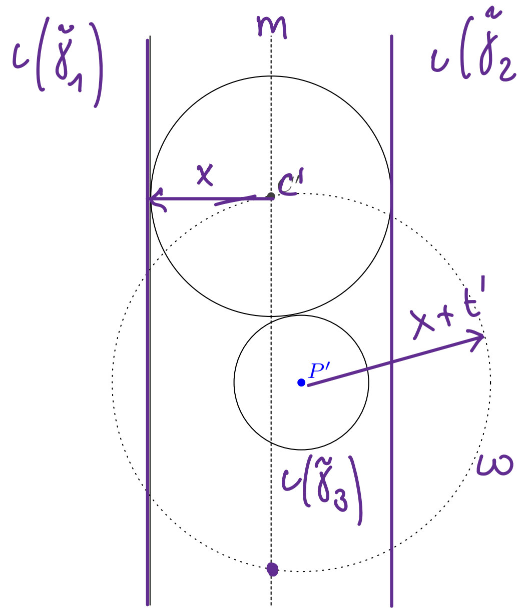
On suppose $\delta_{13} > \delta_{23} > \delta_{12}$

Un cercle de rayon R et de centre C est tangent aux cercles γ_1 et γ_2 si est seulement si le cercle de centre C est de rayon $R - \frac{\delta_{12}}{2}$ est tangent aux cercles $\tilde{\gamma}_1\left(M ; r + \frac{\delta_{12}}{2}\right)$ et $\tilde{\gamma}_2\left(N, r + \frac{\delta_{12}}{2}\right)$.



$\Rightarrow$ On peut augmenter le rayon des 3 cercles de $\frac{\delta_{12}}{2}$ et supposer que deux des cercles donnés sont tangents en un point Q.

L'astuce est d'appliquer une inversion de centre Q qui transforme les deux premiers cercles (tangents en Q) en deux droites parallèles (tangentes à l'infini) et le troisième cercle en un cercle homothétique de centre P' et de rayon t'.



Le centre de tout cercle tangent aux deux droites parallèles $\iota(\tilde{\gamma}_1)$ et $\iota(\tilde{\gamma}_2)$ se situe sur la droite médiane m à distance x de $\iota(\tilde{\gamma}_1)$ et $\iota(\tilde{\gamma}_2)$.

Traçons cette droite m.

Traçons le cercle ω de centre P' et de rayon $t'+x$.

Les intersections de ω et m sont les centres des deux cercles de rayon x tangents aux deux droites $\iota(\tilde{\gamma}_1)$ et $\iota(\tilde{\gamma}_2)$ et à $i(\tilde{\gamma}_3)$.

Lequel doit-on prendre pour qu'en appliquant l'inversion une nouvelle fois, on résolve le problème d'Apollonius ?