Série 35 et 36

Exercice 1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on rappelle que l'*exponentielle complexe* est définie par

$$e^{\theta i} := \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Vérifie que $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$. Démontre aussi que pour deux complexes $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$, on a :

$$zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}, \quad z^{-1} = \rho^{-1}e^{-i\theta}, \quad -z = \rho e^{i(\theta+\pi)}.$$

Exercice 2. Mets les nombres complexes suivants sous forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$).

a) $(3-5i) + (-2-4i) - (1-2i)$;
b) $3(5-2i) + 2(7-i) - 3(4-3i)$;
c) $(9+5i)(2-7i)$;
d) $(3+2i)(3-2i)$;
e) $(3-4i)^2$;
f) $(1+i)^4$;
g) $\frac{1}{i}$;
h) $\frac{1}{2+3i}$;
i) $\frac{1+i}{1-i}$;
j) $\frac{5+3i}{2+4i}$;
k) $\left(\frac{63+16i}{4+3i}\right)^2$;
l) $e^{\frac{3\pi i}{2}}$;
m) $\sqrt{2}ie^{\frac{\pi i}{2}}$;
n) $\frac{2e^{\frac{\pi i}{3}}}{1+i}$;
o) $\frac{i}{e^{\frac{\pi i}{4}}}$;
p) $\frac{a+bi}{c+di}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;
q) i^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Représente les points suivants dans le plan complexe :

$$z_A = 2 - i, \quad z_B = -3 + 2i, \quad z_C = z_A + z_B, \quad z_D = z_A - z_B,$$
$$z_E = \frac{z_A + \overline{z_A}}{2}, \quad z_F = \frac{z_A - \overline{z_A}}{2}, \quad z_G = -z_A, \quad z_H = -\overline{z_A}.$$

Exercice 4. Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Montre que

a) $\overline{\overline{z}} = z$;
b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$;
c) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$;
d) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;
e) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ si $w \neq 0$;
f) $|z|^2 = z\overline{z}$;
g) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ si $w \neq 0$;
h) $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$.

Exercice 5. Donne les sous-ensembles des $z \in \mathbb{C}$ déterminés par les conditions suivantes :

a) $\overline{z} = z$;
b) $\overline{z} = -z$;
c) $|z + i| \leq 1$;
d) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$;
e) $|z-1| > |z-2|$;
f) $\mathrm{Im}(az) = b$ pour $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montre que

a) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;
b) $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)\mathrm{i}$;
c) $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$;
d) $|\,\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$;
e) $|\,\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

Exercice 7. Mets les nombres suivants sous forme exponentielle :

a) 1 ;
b) i ;
c) -2 ;
d) $-1 - \mathrm{i}$;
e) $-1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$;
f) $3 + 4\mathrm{i}$;
g) $12 + 5\mathrm{i}$.

Exercice 8. **Formule de Moivre.** Montre par récurrence que

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n \;=\; \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9. Calcule :

a) $(1 + \sqrt{3}\mathrm{i})^7$;
b) $\left(\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^9$;
c) $\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}$.

Exercice 10. Détermine les formes algébriques et exponentielles des nombres $z \in \mathbb{C}$ qui satisfont respectivement les équations

$$z^4 = 1 + \mathrm{i}, \qquad z^6 = 1 \qquad \text{et} \qquad z^5 = -32,$$

et représente-les dans le plan complexe.

Exercice 11.

a) Pour un réel positif $a > 0$, détermine l'ensemble E_a de tous les $z \in \mathbb{C}$ qui satisfont la condition $|z| = a$.
b) Montre que pour tout $a > 0$, $z \in E_a$ si et seulement si $\overline{z} \in E_a$.
c) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $w \in E_a$. Détermine l'ensemble de tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $wz \in E_b$. L'application $z \mapsto wz$ ainsi définie est elle surjective sur E_b ? Justifie ta réponse.

Exercice 12. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontre ta réponse.

a) Il existe un $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z + \frac{1}{z} = 0.$$

b) Le module de $(1 + \mathrm{i})^{16}$ vaut 256.
c) Le sous-ensemble $\{(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{C}$ contient un nombre infini d'éléments.

Exercice 13. Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montre que le produit, le conjugué et l'inverse d'un élément de U est encore dans U. Peut-on en dire autant de la somme, de l'opposé et de la racine n-ième avec $n \in \mathbb{N}$? Déduis-en une structure de groupe sur U.

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a + b$ et ab sont réels. Démontre que $a, b \in \mathbb{R}$ ou $b = \overline{a}$.

Exercice 15. Soient a, b, c trois points de du plan complexe. Montre que a, b, c appartiennent à une même droite si et seulement s'il existe trois réels α, β, γ tels que

$$(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0), \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha a + \beta b + \gamma c = 0.$$