Exercice 1.

a) Par le cours ces équations sont $\dfrac{3x+4y+6}{5} = \pm\dfrac{y+6}{1}$, c'est-à-dire

$$3x - y - 24 = 0 \qquad \text{et} \qquad 3x + 9y = -36$$

b) Les droites ont des vecteurs normaux colinéaires et sont donc parallèles. En appliquant la formule du cours, on devrait trouver une seule équation, celle de la droite située exactement entre les deux parallèles. En effet, on a $\dfrac{x-y+6}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{3x-3y-4}{3\sqrt{2}}$, c'est-à-dire

$$6x - 6y + 14 = 0 \qquad \text{et} \qquad 18 = -4$$

Une équation cartésienne de la droite équidistante des deux droites données est donc $3x - 3y + 7 = 0$.

Exercice 2.

a) $C = (0;0)$, $r = 2$.

b) $x^2 - 2x + y^2 - 6y - 6 = 0 \iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 1 - 9 - 6 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$, $C = (1;3)$ et $r = 4$.

c) $36x^2 - 36x + 9 + 36y^2 + 48y + 16 - 9 - 16 - 119 = 0 \iff (6x-3)^2 + (6y^2+4)^2 - 144 = 0 \iff 36(x-1/2)^2 + 36(y+2/3)^2 = 144 \iff (x-1/2)^2 + (y+2/3)^2 = 4$ et donc $C = (1/2; -2/3)$ et $r = 2$.

d) $x^2 + 8x + y^2 - 4y + 25 = 0 \iff x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 + 25 - 16 - 4 = 0 \iff (x+4)^2 + (y-2)^2 = -5$ et donc ce n'est pas l'équation d'un cercle car il n'existe pas de $x, y \in \mathbb{R}$ la satisfaisant.

e) $3x^2 + 2x + 3y^2 - 4y - 12 = 0 \iff x^2 + 2/3x + y^2 - 4/3y - 4 = 0 \iff x^2 + 2/3x + 1/9 + y^2 - 4/3y + 4/9 - 4 - 1/9 - 4/9 \iff (x+1/3)^2 + (y-2/3)^2 = 41/9$ et donc $C = (-1/3; 2/3)$ et $r = \sqrt{41/9}$.

Exercice 3. L'équation du cercle est $x^2 - 3x + y^2 - 4y - \frac{75}{4} = 0$, c'est-à-dire $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 5^2$. Le centre du cercle est $C = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$, et son rayon est $r = 5$. Si on n'a pas vu que le vecteur $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est de norme 5 (et donc que P est sur le cercle), on peut utiliser la formule du cours qui affirme que la pente des tangentes $y = mx + h$ satisfont $-16m^2 - 24m - 9 = 0$, c'est-à-dire $-(4m+3)^2 = 0$. L'equation est de degré 2, avec une solution double : cela signifie que P est sur le cercle.
On peut soit conclure en calculant $m = -\frac{3}{4}$, puis $h = 6 + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{2} = \frac{75}{8}$, soit en utilisant $\overrightarrow{CP}$ comme vecteur normal de la tangente passant par P. Dans les deux cas, on obtient une équation de la tangente équivalente à $6x + 8y - 75 = 0$.

Exercice 4. Avant de se lancer dans des résolutions de systèmes d'équations, il est avantageux de déterminer le centre et le rayon du cercle, puis de comparer ce rayon à la distance du centre à la droite donnée appelée d ici (et de vecteur normal $\vec{n}$).

a) Le cercle est d'équation $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{4}$ et donc de centre $C = \left(\frac{3}{2}; -1\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$. De plus, $\delta(C; d) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, clairement plus petit que le rayon du cercle. Après résolution du système d'équation, on trouve les points d'intersection $(0; -3)$ et $\left(\frac{11}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

b) Le cercle est d'équation $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$ et donc de centre $C = (4; -1)$ et de rayon $\sqrt{5}$. De plus, $\delta(C; d) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$: la droite est tangente au cercle en un point T. Un point de d est par exemple $P = (1; 0)$, et le point de tangence est donné par $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC} + \mathrm{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{CP})$: on trouve le point d'intersection $T = (3; 1)$.

c) Le cercle est de centre $C = (0; 0)$ et de rayon 1. De plus, $\delta(C; d) = \frac{10}{\sqrt{2}} > 1$: la droite n'intersecte pas le cercle.

Exercice 5. Trouvons tout d'abord les équations des deux bissectrices des droites données. Ces équations sont données par

$$\frac{7x - y - 5}{5\sqrt{2}} = \pm\frac{x + y + 13}{\sqrt{2}} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 7x - y - 5 = \pm(5x + 5y + 65)$$

ce qui donne les équations $3x + y + 15 = 0$ et $x - 3y - 35 = 0$ des deux bissectrices.

Cherchons ensuite l'équation de la droite p perpendiculaire à la droite $7x - y - 5 = 0$ et passant par le point $P = (1;2)$ (en effet, on vérifie que P appartient bien à la droite t et non à s). Le vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ de t donne le vecteur $\overrightarrow{n_\perp} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ normal à p ; on obtient ainsi l'équation $(p) : x + 7y = 15$.
Les coordonnées des centre A et B des cercles cherchés sont aux intersections de p avec les bissectrices ; on calcule

$$A = (-6;3) \qquad \text{et} \qquad B = (29;-2).$$

Finalement, les rayons des cercles respectifs peuvent être obtenus avec la norme des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BP}$, ou avec les distances $\delta(A;a)$ et $\delta(B;a)$ par exemple :

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{7^2 + 1} = \sqrt{50} \qquad \text{et} \qquad \|\overrightarrow{BP}\| = \sqrt{28^2 + 4^2} = \sqrt{800}.$$

Ainsi, les équations des cercles cherchés sont $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 50$ et $(x-29)^2 + (y+2)^2 = 800$.

Exercice 6. Le centre du cercle est $C = (0;0)$, son rayon est $r = \sqrt{10}$, et on pose $P = (4;2)$. Alors $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal aux tangentes de la forme $y = mx + h$. La condition$\|\mathrm{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{CP})\| = r$ donne

$$\frac{|-4m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{10} \iff 16m^2 - 16m + 4 = 10m^2 + 10 \iff 6m^2 - 16m - 6 = 0 \iff (3m+1)(m-3) = 0$$

On trouve donc les pentes $m_1 = -\frac{1}{3}$ et $m_2 = 3$, et les ordonnées à l'origine $h_1 = \frac{10}{3}$ et $h_2 = -10$. Les deux tangentes sont donc d'équations

$$-x - 3y + 10 = 0 \text{ et } 3x - y - 10 = 0.$$

Comme le produit des pentes vaut -1, on en déduit que les deux tangentes sont perpendiculaires et donc que l'angle entre elles vaut $90°$.

Exercice 7. Les points P proposés sont tels que $P = A$, $P = B$, ou le triangle ABP est rectangle en P : les points P satisfaisant l'équation forment le cercle de Thalès du segment $[AB]$.

Une propriété utile de cette présentation du cercle de Thalès d'un segment est qu'il n'est pas nécessaire de trouver le centre du cercle ni son rayon pour en donner l'équation !

Exercice 8.

a) Le cercle γ_1 est de centre $C_1 = (0;0) = O$ et de rayon $r_1 = 7$; le cercle γ_2, d'équation $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ est de centre $C_2 = (3;4)$ et de rayon $r_2 = 2$; comme $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = 5$, le centre de γ_2 est dans γ_1, et comme $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| + r_2 = r_1$, les cercles sont tangents intérieurement. Les coordonnées du point d'intersection A se trouve soit en résolvant le système d'équations formé par (γ_1) et (γ_2), soit directement par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC_2} + 2 \cdot \frac{1}{\|\overrightarrow{C_1C_2}\|} \cdot \overrightarrow{C_1C_2}$. On trouve

$$A = (21/5; 28/5).$$

b) Comme les cercles donnés sont tangents intérieurement en A, le centre M de γ se trouve au milieu du segment $[OA]$: on obtient directement $M = (21/10; 14/5)$. Ce cercle a un rayon égal à la norme de $\overrightarrow{OM}$, qui vaut $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(21/10)^2 + (14/5)^2} = \sqrt{49/4} = 7/2$. Ainsi, une équation de γ est $(x-21/10)^2 + (y-14/5)^2 = 49/4$ dont la forme développée est

$$x^2 - \frac{21}{5}x + y^2 - \frac{28}{5}y = 0.$$

c) Nommons $B = (0; 28/5)$ l'autre intersection (c'est-à-dire distincte de O) de γ avec l'axe des ordonnées et $D = (21/5; 0)$ celle avec l'axe des abscisses. Le triangle BOD est rectangle en O, donc γ est le cercle de Thalès de $[BD]$. Puisque $[OA]$ et $[BD]$ sont des diamètres d'un même cercle, le quadrilatère $ABOD$ est un rectangle (inscrit à γ). Les diagonales de ce rectangle sont perpendiculaires aux côtés du quadrilatère formé par les 4 tangentes : par raison de symétrie, celles-ci forment bien un losange.