Corrigé Test 6 - Géométrie 7 juin 2023

Exercice 1. *(9 (3+3+3) + 3 = 12 points)*

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(-1\,;\,1\,;\,4),\qquad B(2\,;\,2\,;\,3),\qquad C(1\,;\,4\,;\,4)\qquad \text{et}\qquad D(4\,;\,0\,;\,-1).$$

a) Déterminer les coordonnées du point E équidistant des points B et D et appartenant à la hauteur h_D issue de D du tétraèdre $ABCD$.

Plan médian de BD : $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $M(3;1;1)$

$\Rightarrow\ \mu_{BD}\ :\ x - y - 2z = 0.$

$$\overrightarrow{h_D} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

d'où $h_D : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$h_D \cap \mu_{BD}\ :\ 4 + 3k + 2k + 2 - 14k = 0 \ \Leftrightarrow\ 6 = 9k \ \Leftrightarrow\ k = \frac{2}{3}$ d'où $E\left(6; -\frac{4}{3}; \frac{11}{3}\right)$

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\,|15 + 2 - 35| = \frac{18}{6} = 3.$$

Exercice 2. *(2 + 8 + 3 + 5 = 18 points)*

On considère la conique d'équation $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 28 = 0$.

a) De quel type de coniques s'agit-il ? Justifier la réponse par un seul calcul !
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - ac = (-1)^2 - 3 \cdot 3 = -8 < 0$, donc c'est une ellipse.

b) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle u et v) pour éliminer le double produit xy, en explicitant les différentes étapes.
On cherche les valeurs propres puis les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda)(4-\lambda)$ d'où les valeurs propres 2 et 4.
On calcule facilement que $E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et en normalisant les vecteurs propres, on pose $\overrightarrow{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui forment bien une base orthonormée.
On obtient alors le changement de variables $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v)$.
En remplaçant dans l'équation de base et en simplifiant, il vient

$$2u^2 + 4v^2 - 16u + 8v + 28 = 0.$$

c) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle X et Y) pour amener l'équation de la conique sous forme canonique.
On complète les carrés :
$2u^2 - 16u = 2(u^2 - 8u) = 2(u-4)^2 - 2 \cdot 16$ et $4v^4 - 16v = 4(v^2 + 2v) = 4(v+1)^2 - 4 \cdot 1$.
On pose alors $X = u - 4$ et $Y = v + 1$.
On remplace dans l'équation et on simplifie pour obtenir l'équation $2X^2 + 4Y^2 = 8$.
On a donc l'équation canonique $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} = 1$, qui est bien l'équation d'une ellipse.

d) Déterminer la longueur des axes et l'excentricité de la conique.
Calculer son centre dans les coordonnées originales $(x; y)$.
La longueur du grand axe $2a = 2 \cdot \sqrt{4} = 4$ et celle du petit axe $2b = 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
Ainsi, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Avec les coordonnées $(X; Y)$, l'ellipse est centrée en $(0; 0)$.
En effectuant les changements de coordonnées à l'envers, on trouve le centre $(4; -1)$ dans les coordonnées $(u; v)$ puis finalement le centre $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$ dans les coordonnées $(x; y)$.

Exercice 3. *(2 + 3 + 3 = 8 points)*

On considère le point $P(1;5)$ et le cercle Γ donné par l'équation $x^2 + 2x + y^2 - 6y - 15 = 0$.

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ.
En complétant les carrés, il vient $(x+1)^2+(y-3)^2-1-9-15 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2 = 25$.
Le centre du cercle est $(-1;3)$ et son rayon vaut 5.

b) Déterminer la puissance de P par rapport au cercle Γ.
Que peut-on en déduire sur la position de P relativement au cercle Γ.

On sait que la puissance est donnée par $p(P,\Gamma) = ||\overrightarrow{CP}||^2 - r^2$.
Or, on a $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $||\overrightarrow{CP}||^2 = 8$, donc la puissance est égale à $p(P,\Gamma) = 8 - 25 = -17$.
Le point P est à l'intérieur du cercle Γ car $p(P,\Gamma) < 0$

c) Déterminer la polaire de P par rapport au cercle Γ par calculs.
On sait que la polaire est le lieu géométrique des points M tel que $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM} = r^2$.

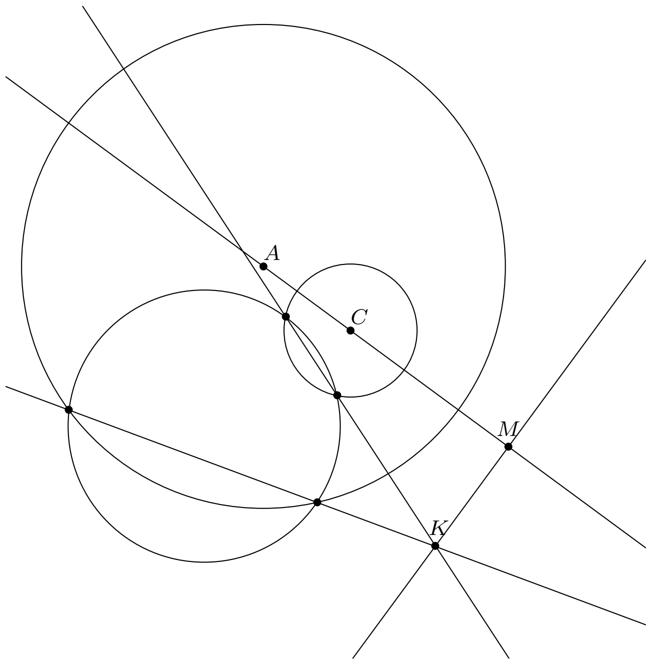
Si $M(x,y)$ appartient à la polaire, alors on a

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix} = 25 \Leftrightarrow 2(x+1) + 2(y-3) = 25 \Leftrightarrow 2x + 2y = 29.$$

L'équation de la polaire est donc donnée par la droite d'équation $2x + 2y = 29$.

Exercice 4. *(4 + 4 = 8 points)*

Construire l'axe radical des cercles Γ_A et Γ_C de centres A et C.
Écrire la marche à suivre (il peut être utile d'utiliser un troisième cercle).



Marche à suivre :

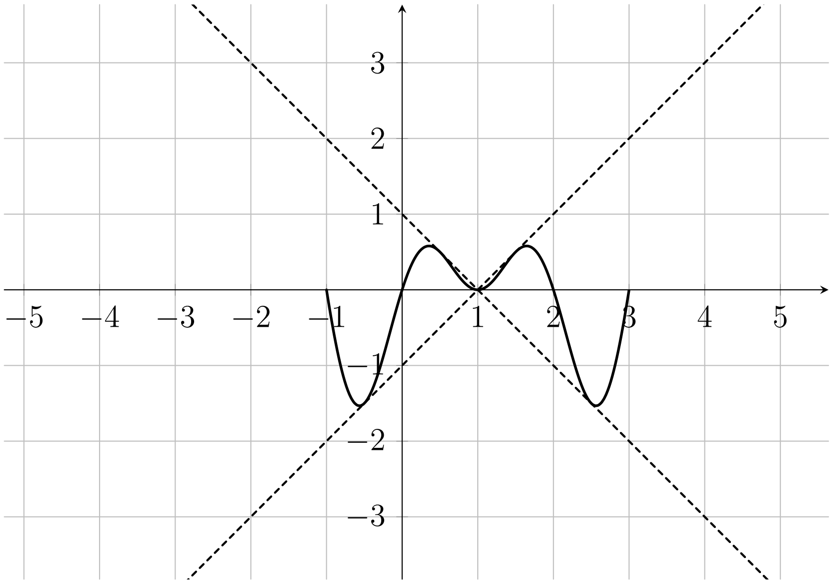
Tracer un cercle Γ' qui coupe chacun des cercles Γ_A et Γ_C en deux points.
L'axe radical de Γ_A et Γ' est la droite passant par leurs deux points d'intersection, et de même pour les cercles Γ_C et Γ'.
Le point K d'intersection des deux droites se trouve sur l'axe radical de Γ_A et Γ_C.
L'axe radical de Γ_A et Γ_C est la droite KM issue de K, perpendiculaire à la droite AC.

Exercice 5. *(2 + 4 + 4 = 10 points)*

a) Déterminer un mouvement tel que $g_0(\overrightarrow{x}) = g_{\frac{1}{2}}(\overrightarrow{x}) = g_1(\overrightarrow{x})$, autre que l'identité.

Par exemple, $g_t(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + t(t - \frac{1}{2})(t-1)\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur de $\mathbb{R}$.

b) Esquisser ci-dessous la fonction $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t+1, t\sin(\pi\, t))$.



c) La figure ci-contre est une vue de face d'un plan α perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$, qui pointe en direction de l'observateur.

Le vecteur $\vec{b}$ se situe dans le plan α.

De plus, $\|\vec{a}\| = 1$ et $\|\vec{b}\| = 3$.

Représenter graphiquement

i) le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$;

ii) un vecteur $\vec{x}$ du plan α, tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$; s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ et $\vec{x_3}$;

iii) un vecteur $\vec{y}$ du plan α, tel que $\vec{b} \times \vec{y} = \vec{a}$; s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{y_1}, \vec{y_2}$ et $\vec{y_3}$;