Exercice 1.

a) On calcule par exemple $\mathcal{A} = |\det(\vec{a}\,;\,\vec{b})| = |-14| = 14$;

b) Par exemple, $\mathcal{A} = |\det(\vec{a}\,;\,\vec{b})| = 12$;

c) Ici, l'aire vaut $\mathcal{A} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2} = \sqrt{29 \cdot 26 - ((-15)+(-4))^2} = \sqrt{393}$.

Exercice 2.

a) Avec par exemple $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, on calcule l'aire $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \cdot |-24-12| = 18$.

Pour la longueur h_B de la hauteur issue de B, on utilise $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot h_B$ pour trouver

$$h_B = \frac{2\mathcal{A}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{2 \cdot 18}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{36}{2\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$$

b) Après avoir vérifié sur une esquisse que le quadrilatère est bien convexe (voir question **c)** !), on partage $ABCD$ en deux triangles, par exemple ABC et ACD. Avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, on calcule l'aire

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| + \tfrac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})| = \tfrac{1}{2} \cdot |2+32| + \tfrac{1}{2} \cdot |48-3| = \tfrac{79}{2}\ .$$

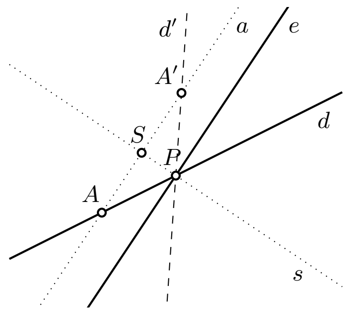
c) L'énoncé devrait vous amener à réaliser qu'un partage "à l'aveugle" d'un quadrilatère en triangles peut amener à des erreurs. Dans ce cas, une esquisse — essentielle ! — montre que le quadrilatère est concave, avec le point D à l'intérieur du triangle ABC. Pour répondre aux questions posées, on sépare $ABCD$ en ABC et BCD, puis en ABD et ACD, pour cela, on utilise par exemple les vecteurs

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}\ ,\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}\ ,\quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}\ ,\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}\ ,\quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les deux manières demandées pour calculer l'aire de $ABCD$ sont alors

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| - \tfrac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})| = \tfrac{1}{2} \cdot |35+6| - \tfrac{1}{2} \cdot |14+4| = \tfrac{23}{2} \qquad \text{et}$$
$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})| + \tfrac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD})| = \tfrac{1}{2} \cdot |20-12| + \tfrac{1}{2} \cdot |12+3| = \tfrac{23}{2}\ .$$

Exercice 3. On exploite l'axe de symétrie s du rayon incident d et du rayon réfléchi d' :



On peut résoudre cet exercice avec des calculs de droites, mais l'approche vectorielle semble plus efficace. L'intersection de d et e donne le point $P = (-1; 2)$, et on choisit arbitrairement un point $A = (-3; 1)$ de d. Le vecteur $\overrightarrow{AS}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de e :

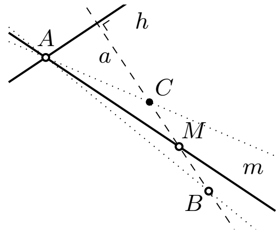
$$\overrightarrow{AS} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\overrightarrow{AP}) = \frac{\overrightarrow{AP} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} = \frac{7}{13} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{13} \\ \frac{21}{13} \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite les coordonnées du point A', symétrique de A par rapport à s :

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{28}{13} \\ \frac{42}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{13} \\ \frac{55}{13} \end{pmatrix}.$$

La droite $d' = A'P$ a comme vecteur normal $\overrightarrow{A'P}_{\perp} = \begin{pmatrix} \frac{29}{13} \\ -\frac{2}{13} \end{pmatrix}$, et on obtient $(d') : 29x - 2y + 33 = 0$.

Exercice 4. Puisque $2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) + 12 \neq 0$, le point C n'appartient pas à h, et de même, $2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \neq 0$ implique $C \notin m$. Si on nomme A l'intersection de h et m, on a la situation suivante :



L'intersection de h et m se trouve en résolvant le système formé par (h) et (m) ; on obtient $A = (-3; 2)$. Le vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite BC qui passe par C donné, donc

$$(BC) : 3x + 2y - 10 = 0.$$

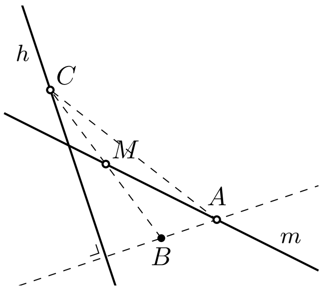
Le point milieu M de $[BC]$ est à l'intersection de m et BC : la résolution du système formé par les deux équations correspondantes donne $M = (6; -4)$. On calcule ensuite

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6-4 \\ -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Le troisième sommet du triangle est $B = (8; -7)$. Avec $\overrightarrow{AB}_\perp = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}_\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, on trouve les deux autres équations des droites supports des côtés :

$$(AB) : 9x + 11y + 5 = 0 \qquad \text{et} \qquad (AC) : 3x + 7y - 5 = 0 \ .$$

Exercice 5. Nous avons la situation suivante :



Suivant l'indication, on pose $C = (\alpha; \beta)$. Cette notation permet de différencier les *équations* de droite des *conditions* imposées sur le point spécifique C cherché. Si cette distinction est claire, il n'y a pas de réel problème à travailler directement avec $C = (x; y)$, comme nous le ferons dans d'autres exercices.
Comme $C \in h$, on a $3\alpha + \beta + 11 = 0$, c'est-à-dire

$$\beta = -3\alpha - 11 \ .$$

Puisque M est le milieu de $[BC]$, on a $M = \left(\frac{2+\alpha}{2}; \frac{-3\alpha-18}{2}\right)$. Enfin, $M \in m$ donne $\frac{2+\alpha}{2} + 2 \cdot \frac{-3\alpha-18}{2} + 7 = 0$, c'est-à-dire $-\frac{5}{2}\alpha = 10$. On trouve $\alpha = -4$ et $\beta = 1$, et donc

$$C = (-4; 1) \ .$$

Un vecteur normal à h est $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à sa perpendiculaire AB est donc $\overrightarrow{v_\perp} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Comme AB passe par $B(2; -7)$, on trouve $(AB) : -x + 3y + 23 = 0$. En résolvant le système

$$\begin{cases} x + 2y = -7 \\ -x + 3y = -23 \end{cases}$$

on obtient $A = (5; -6)$.

Remarque. Le calcul pour C ci-dessus revient à choisir un point C sur h, puis à considérer le milieu M de $[BC]$. Lorsque C varie sur h (c'est-à-dire lorsque le paramètre α varie), le point M décrit une droite n parallèle à h ; la dernière étape du calcul correspond à l'intersection de n avec m — dont on déduit l'emplacement de C.

Exercice 6. Comme à l'exercice précédent, posons $C = (\alpha; \beta)$. L'aire du triangle se calcule avec

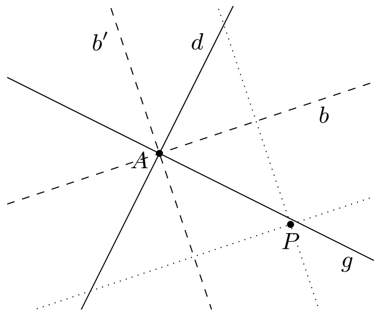
$$\tfrac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha - 2 \\ 1 & \beta + 3 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + 5)$$

et l'équation $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{3}{2}$ devient $-\alpha + \beta + 5 = \pm 3$, c'est-à-dire $-\alpha + \beta = -2$ ou $-\alpha + \beta = -8$ (chacune de ces équations correspond à une droite parallèle à $[AB]$, à distance $\frac{3}{\sqrt{2}}$ de AB, sur laquelle peut se trouver C). Comme le centre de gravité $G = \left(\frac{5+\alpha}{3}; \frac{-5+\beta}{3}\right)$ est sur d, la condition $\frac{-5+\beta}{3} = 3 \cdot \frac{5+\alpha}{3} - 8$ devient $3\alpha - \beta = 4$. Les systèmes

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = -2 \\ 3\alpha - \beta = 4 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} -\alpha + \beta = -8 \\ 3\alpha - \beta = 4 \end{cases}$$

donnent chacun un sommet C possible. On trouve respectivement $C_1 = (1; -1)$ et $C_2 = (-2; -10)$, les deux sommets solutions.

Exercice 7. Comme les bissectrices b et b' de d et g sont des axes de symétrie de ces droites, les deux droites cherchées, en pointillés ci-dessous, sont des droites passant par P et perpendiculaires aux bissectrices (on peut vérifier par calcul que P n'est ni sur d, ni sur g, même si cela n'a pas d'incidence ici) :



Les équations des bissectrices de d et g sont données par

$$\frac{2x - y + 5}{\sqrt{5}} = \pm \frac{3x + 6y - 1}{3\sqrt{5}}$$

c'est-à-dire par $(b) : 3x - 9y + 16 = 0$ et $(b') : 9x + 3y + 14 = 0$ dont des vecteurs directeurs sont respectivement $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Les droites cherchées ont ces vecteurs comme vecteurs normaux, et on obtient les deux équations $3x + y = 5$ et $-x + 3y = -5$.

Exercice 8.

a) Comme $\delta(E; d) = \frac{|3 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + 9|}{\sqrt{34}} = \frac{17}{\sqrt{34}}$, les deux droites à distance $\frac{17}{\sqrt{34}}$ de E et perpendiculaires à d sont les droites cherchées. Le vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ de d est un vecteur normal des droites cherchées, dont les équations sont conséquemment de la forme $(g) : 5x + 3y + c = 0$. La condition $\delta(E; g) = \frac{17}{\sqrt{34}}$ donne

$$\frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + c}{\sqrt{34}} = \pm \frac{17}{\sqrt{34}} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad c = -2 \pm 17$$

et on trouve les deux équations des côtés perpendiculaires au côté donné : $5x + 3y + 15 = 0$ et $5x + 3y - 19 = 0$.

b) Soit F la projection orthogonale de E sur d et $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ un vecteur normal de d. À l'aide d'un point quelconque de d, par exemple $P = (-3; 0)$, on calcule $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis

$$\overrightarrow{EF} = \text{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{EP}) = \frac{-17}{34} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad \overrightarrow{EF}_\perp = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} .$$

On peut alors calculer les 4 sommets du carré :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF}_\perp = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EF}_\perp = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF}_\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EF}_\perp = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d'où les 4 sommets $A = (-3; 0)$ (on retombe sur P par hasard), $B = (0; -5)$, $C = (5; -2)$ et $D = (2; 3)$.

Exercice 9.

a) Les centres C des cercles sont sur la médiatrice m de $[AB]$: celle-ci passe par le milieu $M = (3/2; 9/2)$ du segment et possède $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal ; son équation est donc $7x + 7y = 42$, c'est-à-dire $(m) : y = -x + 6$. Le centre est aussi à même distance de A que de l'axe Ox d'équation cartésienne $y = 0$: en posant $C = (x; y)$, on a $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2$ et l'équation $\delta(C; Ox)^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$ se récrit

$$y^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x^2 + 4x - 2y + 5 = 0$$

(les points $P = (x; y)$ satisfaisant cette équation sont à même distance d'un point et d'une droite ; ils décrivent donc une parabole de foyer C et de directrice Ox). En substituant y donné par (m) dans cette dernière équation, on obtient $x^2 + 6x - 7 = 0$ qui se factorise par Viète comme $(x - 1)(x + 7) = 0$. Si $x = 1$, l'équation (m) donne $y = 5$; et si $x = -7$, on a $y = 13$. En substituant ces valeurs dans le rayon au carré $\|\overrightarrow{AC}\|^2$ donné ci-dessus (ou mieux, dans $\delta(C; Ox)^2 = y^2$ qui est bien plus facile à calculer), on obtient respectivement les équations suivantes pour les deux cercles cherchés :

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25 \qquad \text{et} \qquad (x + 7)^2 + (y - 13)^2 = 169$$

Remarque. Dès que l'on sait que C est sur la médiatrice m, on aurait pu poser $C = (x; -x + 6)$ et continuer les calculs avec ce C (les calculs auraient été un peu plus simples) ; nous proposons dans cet item la méthode ci-dessus pour faire apparaître explicitement l'intersection d'une droite et d'une parabole, et expliquer ainsi géométriquement l'existence des deux cercles solutions.

b) On procède comme au point précédent. Le milieu de $[AB]$ est $M = (1; 3)$, et le vecteur normal $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}$ donne l'équation $-12x + 4y = 0$ de la médiatrice de $[AB]$, que l'on peut récrire $(m) : y = 3x$. Avec $C = (x; y)$ et $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = (x - 7)^2 + (y - 1)^2$, l'équation $\delta(C; t)^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$ devient

$$\frac{(x + y - 10)^2}{2} = (x - 7)^2 + (y - 1)^2$$

qui décrit la parabole de foyer A et de directrice t. En **a)**, nous avons développé cette équation, puis substitué le y de (m). Comme mentionné dans la remarque, les calculs sont plus simples, si on effectue d'abord la substitution avant de développer : on obtient ainsi

$$2(2x - 5)^2 = (x - 7)^2 + (3x - 1)^2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 2x(x + 10) = 0$$

dont les solutions sont $x = 0$ (et alors $y = 0$) et $x = -10$ (et alors $y = -30$). Le rayon au carré est donné par $\|\overrightarrow{AC}\|^2$ (ou $\delta(C; t)^2$, plus facile à calculer), et on obtient respectivement les équations suivantes pour les deux cercles cherchés :

$$x^2 + y^2 = 50 \qquad \text{et} \qquad (x + 10)^2 + (y + 30)^2 = 1250$$

c) Dans ce cas, le centre du cercle sera sur les bissectrices b ou b' des droites données, bissectrices obtenues par les équations

$$\frac{3x + 4y - 35}{5} = \pm \frac{4x + 3y + 14}{5}$$

qui donnent $x - y + 49 = 0$ et $x + y - 3 = 0$, et dont on tire $(b) : y = x + 49$ et $(c) : y = -x + 3$. Les droites d et g partagent le plan en 4 parties. Puisque les cercles cherchés doivent passer par A (et qu'une vérification facile montre que A n'est ni sur d ni sur g), les cercle seront inclus dans la même portion du plan que le point. Une esquisse de d et g (ou un raisonnement sur leur équation) montre que A est dans la même portion de plan que la bissectrice c de pente négative.

Le centre du cercle doit aussi être à la même distance de d et de A, c'est-à-dire $C = (x; y)$ sera sur la parabole d'équation $\delta(C; d)^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$; en substituant directement $C = (x; -x + 3)$, on obtient

$$\frac{(-x - 23)^2}{25} = (x + 1)^2 + (-x - 2)^2 \qquad \text{soit encore} \qquad 49x^2 + 104x - 404 = 0$$

dont les solutions sont $x = 2$ et $x = -\frac{202}{49}$; celles-ci donnent respectivement $y = 1$ et $y = \frac{349}{49}$. Les cercles cherchés sont donc

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \qquad \text{et} \qquad \left(x + \tfrac{202}{49}\right)^2 + \left(y - \tfrac{349}{49}\right)^2 = \left(\tfrac{185}{49}\right)^2$$

Exercice 10. Il n'a qu'une seule tangente commune, d'équation $y = -7$ (pourquoi ?).