Matrices de transition

C. Mermoud

14 juin 2023

Exemple 1
Au cours du dernier mois, trois entreprises détenant la totalité d'un marché se sont livré une concurrence féroce. De fait,
l'entreprise 1 a conservé 80% de sa clientèle, mais en a perdu 10% au profit de l'entreprise 2,
l'entreprise 2 a retenu 75% de sa clientèle, mais en a perdu 5% au profit de l'entreprise 3,
l'entreprise 3 a gardé 90% de sa clientèle et en a perdu 5% au profit de l'entreprise 2.

a) Déterminer une matrice représentant le mouvement de la clientèle

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} = T$$

b) Que vaut la somme des éléments d'une colonne ? Pourquoi ?

Σ vaut 100% = 1 pour représenter toute la clientèle de chaque entreprise.

c) Si $E = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ donne la répartition de la clientèle entre les trois entreprises au début du mois, calculer la répartition de la clientèle au début du mois suivant.

$$T \cdot E = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}245 \\ 0{,}270 \\ 0{,}485 \end{pmatrix}$$

Définition 1 *Une **matrice de transition** T est une matrice carrée dont les éléments t_{ij} sont tous positifs où nuls et tels que la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1. Ainsi, l'élément t_{ij} est égal à* la probabilité de passer de l'état j à l'état i.

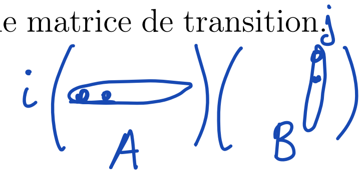
Définition 2 *Une matrice colonne E dont les éléments sont positifs où nuls et tels que leur somme est égale à 1 est appelé **vecteur d'état**.*

*Un vecteur d'état E qui vérifie l'égalité $T \cdot E = E$ est appelé **vecteur stationnaire** pour T. Un vecteur d'état stationnaire est donc un* vecteur propre de T associé à la valeur propre 1, "normé" de sorte que la Σ des composantes vaille 1 et toutes les composantes sont positives.

Propriétés

1. Le produit AB de deux matrices de transition A et B est aussi une matrice de transition.

$A \cdot B = C$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$



$c_{ij} \geq 0$ car les a_{ij} et b_{ij} le sont

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}}^{=1} = 1$$

2. Si T est une matrice de transition alors T^n est une matrice de transition $\forall n \in \mathbb{N}$.

Il suffit de faire une récurrence sur n avec la propriété 1.

3. Toute matrice de transition admet la valeur propre 1.

La somme des éléments des colonnes de T vaut 1

$\Rightarrow$ la somme des éléments des colonnes de $T \cdot 1I$ vaut 0.

$\Rightarrow$ les lignes de $T - I$ sont linéairement dépendantes.

$\Rightarrow$ $\det(A - I) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1$ est valeur propre de T.

4. Toute matrice de transition admet au moins un vecteur d'état stationnaire S.

Exercice 1
Dans une école, on étudie l'évolution de la présence (E_1) ou absence (E_2) des élèves.
La matrice de transition entre ses deux états est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.75 \\ 0.05 & 0.25 \end{pmatrix}$$

a) Interpréter l'élément t_{12} dans ce contexte.

b) Lundi matin, on constate que 220 élèves sont présents et 20 sont absents.
Quelle sera la situation mardi matin ?

c) Montrer que T est diagonalisable.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} T^n$.

e) Quelle interprétation peut-on donner à ce résultat dans ce contexte ?

Exercice 2

a) Déterminer quelques matrices de transition admettant plusieurs vecteurs stationnaires.

b) Quelle(s) condition(s) vous semblent nécessaires pour que toutes les colonnes de $\lim\limits_{k\to\infty} T^k$ soient égales à un vecteur d'état stationnaire T ?

Exercice 3
Pour faire des prévisions météorologiques, grand-mère a défini trois types de prévision : beau (E_1), nuageux (E_2) et pluvieux (E_3). Au cours de sa longue vie, elle a relevé que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

est la matrice de transition entre les trois états définis : p_{ij} est égal à la probabilité de passer de l'état E_j un jour donné, à l'état E_i le lendemain.

a) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fasse beau demain ? dans 2 jours ? dans 3 jours ?

b) Calculer la matrice $Q = P^2 = P \cdot P$ et donner une interprétation de ses éléments q_{ij}.

Réponses

Ex 1

a) $t_{12} = 0.75$ est la probabilité de qu'un élève absent un jour soit présent le lendemain.

b) $T = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.75 \\ 0.05 & 0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224 \\ 16 \end{pmatrix}$

c) $\det(T - \lambda I) = (0.95 - \lambda)(0.25 - \lambda) - 0.05 \cdot 0.75 = \lambda^2 - 1.15\lambda + 0.15 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.15)$ s'annule pour $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0.15$. Il y a donc deux valeurs propres distinctes correspondant à deux espaces propres, chacun de dimension 1, si bien que T est diagonalisable.

d) Les espaces propres sont engendrés respectivement par $U = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

A l'aide de la matrice de changement de base $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$T^n = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.15^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 + 0.15^n & 5 - 5 \cdot 0.15^n \\ 1 - 0.15^n & 1 + 5 \cdot 0.15^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\lim_{n \to \infty} T^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & 5/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$, soit une matrice dont les colonnes sont égales à l'état stationnaire découlant de U, vecteur propre associé à la valeur propre 1.
Notons que V ne peut donner lieu à un vecteur stationnaire car l'une de ses composantes est négative et que la somme des composante est nulle.

e) A long terme, le taux d'absentéisme est de $\frac{1}{6} \cong 17\%$, indépendamment de la situation initiale, c'est-à-dire du nombre d'absents le premier jour.

Ex 2

a) Trivialement, les matrices identités I_n admettent uniquement des vecteurs stationnaires.
Plus généralement, les matrices de transition qui font apparaître des sous-ensembles d'états formant des blocs non connectés possèdent plusieurs vecteurs stationnaires.

b) Le vecteur stationnaire doit être unique. La probabilité de passer d'un état E_j à un état E_i en un nombre d'étapes fini $\leq n$ doit être non nulle $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Ex 3

a) $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ La probabilité qu'il fasse beau le demain est de 60%.

$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.24 \\ 0.28 \end{pmatrix}$ La probabilité qu'il fasse beau dans 2 jours est de 48%.

$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.24 \\ 0.28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$ La probabilité qu'il fasse beau dans 3 jours est de 44%.

b) $Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.42 & 0.34 \\ 0.24 & 0.26 & 0.28 \\ 0.28 & 0.32 & 0.38 \end{pmatrix}$

Un élément q_{ij} de cette matrice est la probabilité de passer de l'état E_j un jour donné, à l'état E_i le surlendemain.