De la concavité du logarithme

J.-C. Chappelier

v. 3; 4 nov. 2020

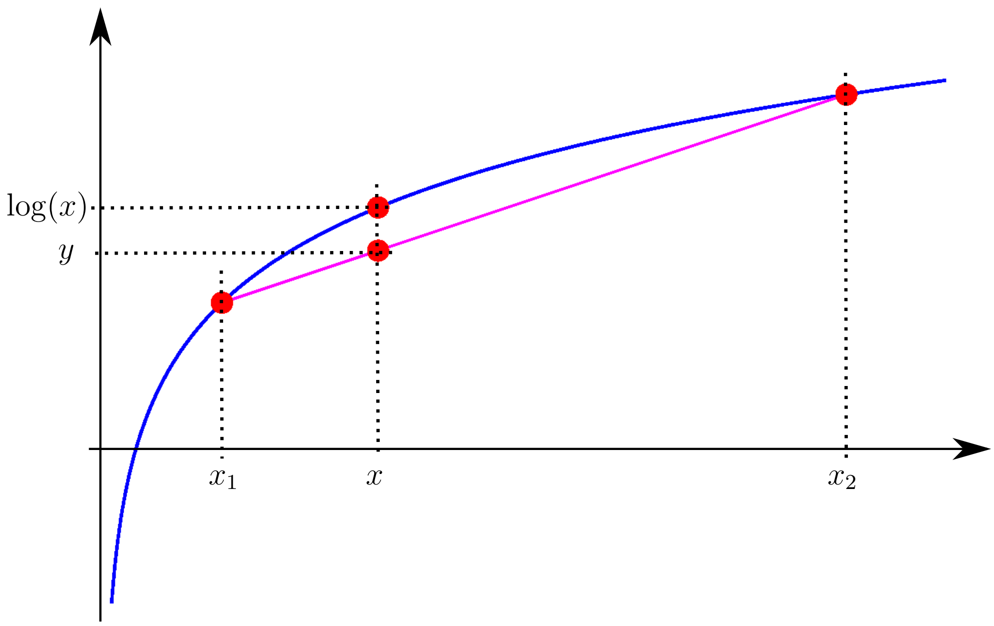

FIGURE 1 – Concavité du logarithme

Soient $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. Et soit $x = \alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2$ un point de l'intervalle $[x_1, x_2]$.

La concavité du logarithme signifie que le point de coordonnées (x, y) sur la corde joignant $(x_1, \log(x_1))$ à $(x_2, \log(x_2))$ est en dessous du point image $(x, \log(x))$ (voir figure 1) : $y \leq \log(x)$.

Or, par linéarité : $y = \alpha\, y_1 + (1-\alpha)\, y_2 = \alpha \log(x_1) + (1-\alpha)\, \log(x_2)$. Donc :

$$\alpha \log(x_1) + (1-\alpha)\, \log(x_2) \leq \log\big(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2\big)$$

La concavité du logarithme se traduit donc ainsi :

$$\forall x_1 > 0,\ \forall x_2 > 0,\ \forall \alpha : \ 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \alpha \log(x_1) + (1-\alpha)\, \log(x_2) \leq \log\big(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2\big)$$

Montrons qu'elle se généralise en :

$$P(n) : \forall x_1 > 0,\ \cdots,\ \forall x_n > 0,\ \forall p_1, \ldots, p_n : 0 \leq p_i \leq 1\ ;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log(x_i) \leq \log\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

$P(1)$ est triviale :

$$\forall x_1 > 0,\ \log(x_1) \leq \log(x_1)$$

$P(2)$ a été établie plus haut (poser $\alpha = p_1$ et donc $1 - \alpha = p_2$).

Montrons que $P(2)$ et $P(n-1)$ impliquent $P(n)$.

Soient $x_1 > 0$, ..., $x_n > 0$ et $p_1, ..., p_n$ tels que $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Posons $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$. Du coup $p_n = 1 - \alpha$.

Si $\alpha = 0$, tous les p_i sont nuls sauf p_n et $P(n)$ devient triviale : $\log(x_n) \leq \log(x_n)$.

Pour $\alpha \neq 0$, posons $X = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} p_i\, x_i$ (c.-à-d. $\alpha\, X = \sum_{i=1}^{n-1} p_i\, x_i$). Noter que $X > 0$.

Posons également $p'_i = p_i / \alpha$. Notez que $\sum_{i=1}^{n-1} p'_i = 1$ (et $X = \sum_{i=1}^{n-1} p'_i\, x_i$).

Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i \log(x_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} p_i \log(x_i) + (1-\alpha)\ \log(x_n) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n-1} p'_i \log(x_i) + (1-\alpha)\ \log(x_n)
\end{aligned}$$

Puis par $P(n-1)$ appliqué aux p'_i sur le premier terme (il faut que les coeffients somment à 1) :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i \log(x_i) &\leq \alpha \log(\sum_{i=1}^{n-1} p'_i\, x_i) + (1-\alpha)\ \log(x_n) \\
&\leq \alpha \log(X) + (1-\alpha)\ \log(x_n)
\end{aligned}$$

et par $P(2)$:

$$\begin{aligned}\alpha \log(X) + (1-\alpha)\ \log(x_n) &\leq \log\left(\alpha X + (1-\alpha)x_n\right) \\ &\leq \log\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\end{aligned}$$

QED.