Analyse II

Série de révision

Printemps 2019

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit l'équation différentielle

$$y' \sin(x) + y \cos(x) + \sin(2x) = 0$$

pour $x \in]0, \pi[$. Alors la solution générale est

- ☐ $y(x) = e^{-\mathrm{Log}(\sin(x))} \cos(2x) + \dfrac{C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = \dfrac{\sin^2(x) + C}{\cos(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ■ $y(x) = \dfrac{\cos^2(x) + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = \dfrac{\sin^2(x) + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Question 2 : Soit l'équation différentielle

$$x y' - y = x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

pour $x \in]0, \infty[$ avec $y(1) = \frac{\pi}{4}$. Alors

- ■ $y(x) = x \,\mathrm{Arctg}\big(\mathrm{Log}(x) + 1\big)$
- ☐ $y(x) = x \,\mathrm{Arctg}\big(\mathrm{Log}(x)^2 + 1\big)$
- ☐ $y(x) = \dfrac{1}{x} \mathrm{Arctg}\big(\mathrm{Log}(x) + 1\big)$
- ☐ $y(x) = x \,\mathrm{Arctg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Indication: Effectuer le changement de variables $y(x) = x v(x)$.

Question 3 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y \,\mathrm{Log}\Big(1 + \big(x^2 + y^2\big)^2\Big)}{\big(x^2 + y^2\big)^{5/2} \exp\Big(\sqrt{x^2 + y^2}\Big)}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$. Alors

- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{4}$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ■ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

Question 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ■ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$
- □ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$
- □ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
- □ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$

Question 5 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \big(1 - \cos(y)\big)\sin^2(x)$$

et soit le point $\vec{p} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Le plan tangent au graphe de f en $\big(\vec{p}, f(\vec{p})\big)$ est donné par l'équation

- □ $z = -\frac{4}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}(y - \pi)$
- ■ $z = \frac{2}{\pi}y - \frac{4}{\pi}x + 4$
- □ $z = \frac{2}{\pi}y + \frac{4}{\pi}x + 4$
- □ $z = -\frac{4}{\pi}x + \frac{2}{\pi}y$

Question 6 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \mathrm{Log}\big(x^2 + y\big)\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

pour $x > 0$ et $y > 0$. Alors la dérivée directionnelle de f au point $(1,1)$ dans la direction $\vec{e} = (0,1)$ est égale à

□ $\dfrac{1}{2}$ □ 2 ■ $-\dfrac{1}{2}$ □ π

Question 7 : Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geqslant 1\,,\ y \geqslant 1\,,\ x + y \leqslant 3\big\}$. Alors

- □ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^{2-y} f(x,y)\,dx\right) dy$
- ■ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} f(x,y)\,dy\right) dx$
- □ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{3-x} \left(\int_1^{2} f(x,y)\,dx\right) dy$
- □ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_1^{3-x} f(x,y)\,dy\right) dx$

Question 8 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x + x^2\, e^{\sin(y)}.$$

Alors la matrice hessienne de f est

■ $\begin{pmatrix} 2e^{\sin(y)} & 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} \\ 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} & x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big)e^{\sin(y)} \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big)e^{\sin(y)} & 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} \\ 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} & 2e^{\sin(y)} \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 2e^{\sin(y)} & 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} \\ 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} & x^2\cos(y)^2\, e^{\sin(y)} \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 2e^{\sin(y)} & 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} \\ 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} & -x^2\sin(y)\, e^{\sin(y)} \end{pmatrix}$

Question 9 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie implicitement par l'équation

$$f\big(x,y,g(x,y)\big) = 11\,.$$

Sachant que $g(1,3) = -2$, on a

□ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \dfrac{12}{5}$

□ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 0$

□ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 11$

■ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \dfrac{9}{2}$

Question 10 : Soit $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) \end{array}$ une fonction quelconque de classe C^1.

On considère la fonction

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & h(u,v) = \big(ve^{-2u}\,,\, u^2e^{-v}\,,\, u\big) \end{array}$$

et on définit $f = g \circ h$. Alors

□ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,0,1)$

□ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + 2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1,1)$

□ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$

■ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$

Question 11 : Soit l'équation différentielle

$$y' \left(y + x^2 y\right) = x$$

pour $x \in \mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$. Alors la solution $y(x)$ vérifie

- ☐ $y(1) = \sqrt{4 + 2\,\mathrm{Log}(2)}$.
- ☐ $y(1) = 2 + \sqrt{\mathrm{Log}(2)}$.
- ■ $y(1) = \sqrt{4 + \mathrm{Log}(2)}$.
- ☐ $y(1) = -\sqrt{4 + \mathrm{Log}(2)}$.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 12 : Soient h et k deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ avec $h(0) \neq 0$. S'il existe un nombre réel α tel que $k(x) = \alpha h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors l'équation différentielle $y' + h(x)y = k(x)$ est séparable.

■ VRAI □ FAUX

Question 13 : Si $y(x)$ est la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}$ la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est aussi solution de l'équation.

□ VRAI ■ FAUX

Question 14 : Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants, alors $y(x) = 2\big(y_1(x) - y_2(x)\big)$ est solution de l'équation homogène associée.

■ VRAI □ FAUX

Question 15 : Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$. Si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha t, \beta t) = 0\,,$$

alors f est continue en $(0,0)$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 16 : Si une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,.$$

□ VRAI ■ FAUX

Question 17 : Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en (x,y), alors

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0\,.$$

■ VRAI □ FAUX

Question 18 : Soient $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. Soit $h = f \circ g$ et $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$J_h(\vec{p}) = J_g\big(f(\vec{p})\big)\, J_f(\vec{p})\,.$$

☐ VRAI ■ FAUX

Question 19 : Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h^2,y_0) - f(x_0,y_0)}{h^2}\,.$$

☐ VRAI ■ FAUX

Question 20 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble borné et fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé. Si $G\colon \widetilde{D} \to D$ est une fonction bijective de classe C^1 alors on a :

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\widetilde{D}} f\big(G(u,v)\big)\,\big|\det\big(J_G(u,v)\big)\big|\,du\,dv$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en $\vec{p}$, alors $\vec{p}$ est un point stationnaire de f.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soient $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors la fonction

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$$

est de classe C^1 et on a

$$F'(t) = f\big(b(t),t\big)\,b'(t) - f\big(a(t),t\big)\,a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} (\partial_2 f)(x,t)\,dx\,.$$

■ VRAI ☐ FAUX