Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse II
Examen

Partie commune
Printemps 2015

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Analyse II du semestre de printemps 2015.

– Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

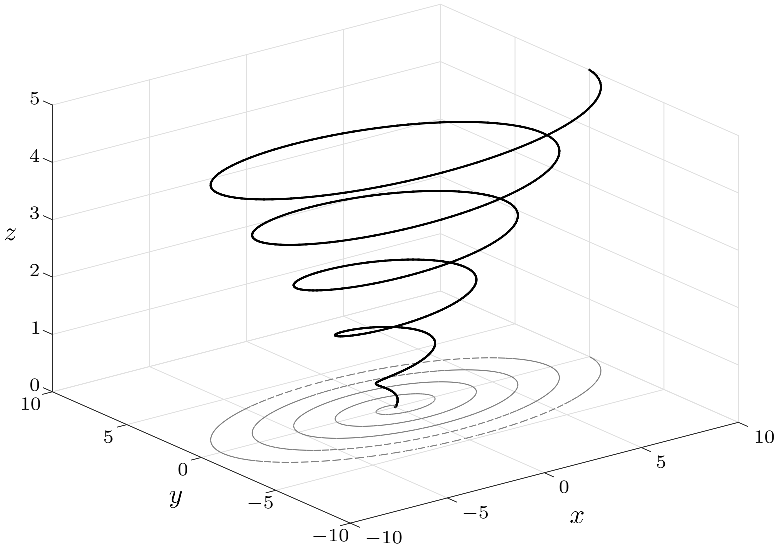
– Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient une courbe ainsi que sa projection sur le plan x-y illustrées dans la figure suivante :



Laquelle parmi les suivantes pourrait être une paramétrisation de cette courbe ?

- ☐ $(x, y, z) = (2\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (2t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (t\cos(2\pi t), 2t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$

Question 2 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{(x^2 + y^4)^{\frac{3}{2}}}$.

Alors

- ☐ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x, y) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x, y) = y$
- ☐ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x, y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x, y) = 1$

Question 3 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + xy\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors

- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Question 4 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = \big(\cos(xz),\, \sin(y-z)\big)^{\mathrm{T}}$. Alors la matrice jacobienne $J_f(x,y,z)$ de f évaluée au point $\mathbf{p} = \left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ est :

- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 5 : Soit $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $h(u,v) = \big(-u(1-2v),\, u^2(1-v),\, uv\big)^{\mathrm{T}}$ et soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, une fonction de classe C^1. Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(u,v) = g\big(h(u,v)\big)$, satisfait en $(u,v) = (1,0)$:

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) - 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = -\dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) + 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) - \dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0,0) - \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,0,0)$

Question 6 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x - y - x^2 + y^3$ et soit le point $\mathbf{p} = (-2,1)$. Alors le plan tangent au graphe de f en $\big(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})\big)$ est donné par l'équation :

- ☐ $z - 5x - 2y + 6 = 0$
- ☐ $z - 5x - 2y - 8 = 0$
- ☐ $z - 5x - 2y - 2 = 0$
- ☐ $z - 2x - 5y + 7 = 0$

Question 7 : Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = e^{x^2+y-1}$$

au point $(1,0)$ est :

- ☐ $p_2(x,y) = -1 + 2(x-1) + y + 3(x-1)^2 + 2(x-1)y + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + 3(x-1)^2 + 2(x-1)y + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2x + y + 3x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + 6(x-1)^2 + 4(x-1)y + y^2$

Question 8 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 2x^2y^3z^4 + 2x^3y^2 - 3y^2z - 1$ et soit $\mathbf{p} = (1,1,1)$. Puisque $f(\mathbf{p}) = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \neq 0$, l'équation $f\big(x,y,z\big) = 0$ définit dans un voisinage de $(y,z) = (1,1)$ une fonction $x = g(y,z)$ qui satisfait $g(1,1) = 1$ et $f\big(g(y,z),y,z\big) = 0$ ainsi que :

- ☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -2$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\frac{4}{5}$

Question 9 : Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 1 \text{ et } y > -1\big\}$ et soit la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \operatorname{Log}\big(x^2 + y\big)$. Alors un vecteur $\boldsymbol{v}$ dans la direction perpendiculaire à la ligne de niveau de f qui passe par le point $(2,0)$ est :

- ☐ $\boldsymbol{v} = (1,-4)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = \big(-\tfrac{1}{4},-1\big)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (4,1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (-4,1)^{\mathrm{T}}$

Question 10 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2y + 1$. Alors le point $\mathbf{p} = \big(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0\big)$

- ☐ est un point selle de f
- ☐ est un point de maximum local de f
- ☐ n'est pas un point stationnaire de f
- ☐ est un point de minimum local de f

Question 11 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy$. La valeur maximale de f sous la contrainte $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4 = 0$ est :

- ☐ 1
- ☐ $-\sqrt{2}$
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ 0

Question 12 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ et soit la fonction $f \colon D \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = y + 2x$. Alors le maximum absolu $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D et le minimum absolu $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D satisfont :

- ☐ $M = 1$ et $m = -1$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = 0$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = -\sqrt{5}$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = -1$

Question 13 : Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)\, dy \right) dx$$

est égale à :

- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{-y^2}^{y^2} f(x,y)\, dx \right) dy$

Question 14 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\,,\ y \geq 0\,,\ x \leq 0\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D x\, y\, dx\, dy$$

vaut :

- ☐ -30
- ☐ 30
- ☐ 3π
- ☐ 0

Question 15 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $(x^2+9)\, y' + x\, y - x\, y^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{4}$ satisfait aussi :

- ☐ $y(4) = \frac{1}{6}$
- ☐ $y(4) = 1$
- ☐ $y(4) = -\frac{1}{4}$
- ☐ $y(4) = 6$

Question 16 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle $u'' - 4u' + 5u = 8\sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = 5$ est :

- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t} + 1\big) - \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$
- ☐ $u(t) = -\sin(t)\big(2e^{2t} + 1\big) + \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(4e^{2t} - 1\big) + \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t} + 1\big) + \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 17 : Soient p, q et g des fonctions continues de $I \to \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, et soit $L(u) = u'' + p\ u' + q\ u$. Si u_h est solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ et u_p est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$, alors $u_p + \frac{1}{2}u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soit une fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 1$. Si pour tout $\varphi \in \left[0, 2\pi\right[$ fixé on a $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r>0}} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = 1$, alors f est continue en $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$ pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit une fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, alors f est de classe $C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soient $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ deux fonctions de classe C^1. Alors la fonction $h = g \circ f$ est de classe C^1 et on a pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ que $J_h(\mathbf{p}) = J_g\big(f(\mathbf{p})\big)\, J_f(\mathbf{p})$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, une fonction de classe C^2. Alors pour tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en $\mathbf{p}$, alors $\mathbf{p}$ est un point stationnaire de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\, x \geq 0\}$. Alors $\displaystyle\int_D \frac{\tan(y)}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy > 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{p}$ est un point stationnaire de f et si le déterminant de la matrice hessienne $H_f(\mathbf{p})$ est strictement négatif, alors f admet un maximum local en $\mathbf{p}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$, une fonction qui est différentiable en un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Alors le vecteur $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}),\, 1\right)^{\mathsf{T}}$ est perpendiculaire à l'hyperplan tangent au graphe de f en $\big(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})\big)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble borné et fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé. Si $G \colon \widetilde{D} \to D$ est une fonction bijective de classe C^1 alors on a :

$$\int\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\widetilde{D}} f\big(G(u,v)\big)\,\big|\det\big(J_G(u,v)\big)\big|\,du\,dv$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = (1,1)^{\mathsf{T}}$ est égale à la limite :

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\neq(0,0)}} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné et fermé. Si f n'admet pas de maximum absolu sur D, alors f n'est pas continue sur D.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to B$ une fonction bijective avec f et f^{-1} de classe C^1. Alors pour tout $\boldsymbol{p} \in A$ on a $\det(J_f(\boldsymbol{p})) \neq 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : L'ensemble $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq 0 \big\}$ est fermé.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : Soit $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel de classe C^2. Alors $\nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX