Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse II
Examen

Partie commune
Printemps 2016

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Analyse II du semestre de printemps 2016.

- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

  -1 point si la réponse est incorrecte.

- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  $+1$ point si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

  -1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = \big(t\cos(t),\, t\sin(t),\, t\big)^{\mathrm{T}}.$$

La longueur de l'arc de la courbe γ reliant les points $A = (0,0,0)$ et $B = (2\pi, 0, 2\pi)$ est égale à :

- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} (2+t^2)\,dt$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{2+t^2}\;dt$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2t^2\;dt$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2+t^2}\;dt$

Question 2 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ et la fonction $f \colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Alors

- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = y$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

Question 3 : Soit $D =]0,\infty[\times]0,\infty[$ et la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \big|\mathrm{Log}(x)\,\mathrm{Log}(y)\big|.$$

Alors

- ☐ f n'est pas continue en $(1,1)$
- ☐ les dérivées partielles de f existent en $(1,1)$
- ☐ f est bornée sur D
- ☐ la dérivée partielle de f par rapport à y n'existe pas en $(1,1)$

Question 4 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y) = \big(e^{xy}\,,\, \cos(xy)\,,\, \mathrm{Arctg}(x-2y)\big)^{\mathrm{T}}.$$

Alors la matrice jacobienne $J_f(x,y)$ de f évaluée au point $\boldsymbol{p} = \big(2,1\big)$ est :

- ☐ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \\ -\sin(2) & -2\sin(2) \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & -\sin(2) & 1 \\ 2e^2 & -2\sin(2) & -2 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \\ -\sin(2) & -2\sin(2) \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & -\sin(2) & 1 \\ 2e^2 & -2\sin(2) & 2 \end{pmatrix}$

Question 5 : Soit la fonction $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$h(u,v) = \big(u^2\,,\, ve^{-u}\,,\, e^{-2v}\big)^{\mathrm{T}}$$

et soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(u,v) = g\big(h(u,v)\big)$, satisfait en $(u,v) = (1,0)$:

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0,1) - e^{-1}\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = e^{-1}\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0,1) - e^{-1}\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = e^{-1}\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,1) - 2\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,0,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,1)$

Question 6 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 2x - y$$

et soit le point $\boldsymbol{p} = (1,-1)$. Alors l'équation du plan tangent au graphe de f en $\big(\boldsymbol{p}\,,\, f(\boldsymbol{p})\big)$ est :

- ☐ $z + 2x + y - 2 = 0$
- ☐ $z + 2x + y + 1 = 0$
- ☐ $z - x + 3y + 3 = 0$
- ☐ $z - x + 3y - 1 = 0$

Question 7 : Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

au point $(0,1)$ est :

- ☐ $p_2(x,y) = x - x^2 - (y-1)^2$
- ☐ $p_2(x,y) = x + x(y-1)$
- ☐ $p_2(x,y) = x + y + 2(x-1)y$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x + y + 2(x-1)y$

Question 8 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = -2xy^3z^4 + 2x^2y^2 - 4$ et soit $\boldsymbol{p} = (1,-1,1)$. Puisque $f(\boldsymbol{p}) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}) \neq 0$, l'équation $f\big(x,y,z\big) = 0$ définit dans un voisinage de $(x,z) = (1,1)$ une fonction $y = g(x,z)$ qui satisfait $g(1,1) = -1$ et $f\big(x, g(x,z), z\big) = 0$ ainsi que :

- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = \dfrac{4}{5}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\dfrac{4}{5}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = 1$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = 4$

Question 9 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = (x^2+y)z + z^2 - z$. Alors un vecteur $\boldsymbol{v}$ perpendiculaire à la surface de niveau de f passant par le point $(2,0,-1)$ est :

- ☐ $\boldsymbol{v} = (1,-4,1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (-1,-4,4)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (4,1,-1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (-4,1,1)^{\mathrm{T}}$

Question 10 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y + 1$. Alors le point $\boldsymbol{p} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

- ☐ est un point de minimum local de f
- ☐ est un point de maximum local de f
- ☐ n'est pas un point stationnaire de f
- ☐ n'est pas un point d'extremum de f

Question 11 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3y - x^2$. La valeur minimale de f sous la contrainte $g(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ est :

- ☐ 6
- ☐ -6
- ☐ -10
- ☐ -9

Question 12 : Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25 \text{ et } y \geq 0\big\}$ et la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = 3y - 4x$. Alors le maximum absolu $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D et le minimum absolu $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D satisfont :

- ☐ $M = 20$ et $m = -20$
- ☐ $M = 20$ et $m = -25$
- ☐ $M = 25$ et $m = -25$
- ☐ $M = 25$ et $m = -20$

Question 13 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1-|x|} f(x,y)\,dy\right)dx$$
est égale à :

- [ ] $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx\right)dy$
- [ ] $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1-|y|} f(x,y)\,dx\right)dy$
- [ ] $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1-|y|} f(x,y)\,dx\right)dy$
- [ ] $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{1-y}^{1+y} f(x,y)\,dx\right)dy$

Question 14 : Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\,,\ y \le 0\,,\ x \le 0\big\}$. Alors l'intégrale
$$\int_D x\,y^3\,dx\,dy$$
vaut :

- [ ] $\dfrac{21}{8}$
- [ ] $-\dfrac{21}{8}$
- [ ] $\dfrac{3\pi}{4}$
- [ ] $\dfrac{31}{20}$

Question 15 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $x^2\,y' + 4\,y' - x\,y + x = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 5$ satisfait aussi :

- [ ] $y\big(\sqrt{5}\,\big) = 7$
- [ ] $y\big(\sqrt{5}\,\big) = 1$
- [ ] $y\big(\sqrt{5}\,\big) = -7$
- [ ] $y\big(\sqrt{5}\,\big) = 2$

Question 16 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle $u'' - u' - 2u = 4t - 2$ pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 3$ satisfait aussi :

- [ ] $u(1) = e - e^{-2}$
- [ ] $u(1) = e^2 - e^{-1}$
- [ ] $u(1) = -2e^{-2} - 2e + 2$
- [ ] $u(1) = e^2 - 3e^{-1}$

Question 17 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et la fonction $f \colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \operatorname{Log}(x^2 + y)\,.$$

Alors la dérivée directionnelle de f au point $(2, 1)$ suivant le vecteur $\boldsymbol{e} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est égale à :

- ☐ $-\dfrac{85}{29}$
- ☐ $-\dfrac{16}{25}$
- ☐ $\dfrac{16}{25}$
- ☐ $\dfrac{85}{29}$

Question 18 : Soit la fonction $F \colon \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_t^{t^2} \frac{e^{xt}}{x}\, dx\,.$$

Alors on a :

- ☐ $F'(1) = 3e$
- ☐ $F'(1) = 1$
- ☐ $F'(1) = 0$
- ☐ $F'(1) = e$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit $L(u) = u'' + p\,u' + q\,u$. Si u_h est une solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ sur I et u_p est une solution de l'équation différentielle $L(u) = g$ sur I, où $g(t) = \cos(t^2)$, alors $3u_p + u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = 3g$ sur I.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 1$. Si pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé on a $\lim_{x\to 0} f(x, ax) = 1$, alors f est continue en $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors, pour tout point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{p})$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$, alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si f admet un maximum local en $\boldsymbol{p}$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} = 0$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Alors

$$0 \;\leq\; \int_D \frac{x^2}{x^2 + y^4}\, dx\, dy \;\leq\; \pi$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. Si $\boldsymbol{p}$ est un point stationnaire de f et si le déterminant de la matrice hessienne $H_f(\boldsymbol{p})$ est strictement positif, alors f admet un minimum local en $\boldsymbol{p}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble fermé et borné $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fermé et borné. Si $G\colon \widetilde{D} \to D$ est une fonction bijective de classe C^1 et $J_G(x,y)$ est la matrice jacobienne de G, alors on a :

$$\int_D f(u,v)\,du\,dv = \int_{\widetilde{D}} f\big(G(x,y)\big)\Big|\det\big(J_G(x,y)\big)\Big|\,dx\,dy\,,$$

en supposant que les deux intégrales existent.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné. Si f est continue sur D, alors f admet un maximum absolu sur D.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : L'ensemble $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,,\ y > 0\,,\ z = 0\big\}$ est ouvert.

☐ VRAI ☐ FAUX