Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse II
Examen

Partie commune
Printemps 2017

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Analyse II du semestre de printemps 2017.

– Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

– Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u' + u^2 \sin(t) = 0$$

pour $t \in \mathbb{R}$ qui satisfait la condition initiale $u(0) = \frac{1}{4}$ vérifie aussi :

- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{2}$
- ■ $u(\pi) = \dfrac{1}{6}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{4e^2}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{e^2}{4}$

Question 2 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' + 3x^2\, y = -6x^2\, e^{-x^3}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi :

- ■ $y(0) = 2$
- ☐ $y(0) = 1 - e^{-2}$
- ☐ $y(0) = -2$
- ☐ $y(0) = e^2 - 1$

Question 3 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'' + 2u' + u = e^{-t}$$

pour $t \in \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$ vérifie aussi :

- ☐ $u(-1) = -\frac{1}{2}e - e^{-1}$
- ☐ $u(-1) = \frac{5}{2}e$
- ■ $u(-1) = \frac{1}{2}e$
- ☐ $u(-1) = e^{-1} - e^2 + \frac{1}{2}e^{-1}$

Question 4 : Soit la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \mathrm{Log}\big(4 - (x+y)^2\big)\,,$$

où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x,y)$ est bien définie. Alors :

- ☐ l'ensemble D est fermé et borné
- ☐ l'ensemble D est borné, mais pas fermé
- ☐ l'ensemble D est fermé, mais pas borné
- ■ l'ensemble D n'est ni fermé, ni borné

Question 5 : Soit la courbe $\gamma : [3,8] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = \left(3t\,,\ 2\,t^{\frac{3}{2}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

La longueur de la courbe est :

- ☐ 540
- ☐ 45
- ■ 38
- ☐ 3

Question 6 : Considérer les deux limites suivantes :

$$\text{(A)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\,, \qquad\qquad \text{(B)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^4+y^8}\,.$$

Alors :

- ☐ la limite (A) existe mais la limite (B) n'existe pas
- ☐ les deux limites existent
- ■ la limite (B) existe mais la limite (A) n'existe pas
- ☐ les deux limites n'existent pas

Question 7 : Soient $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u+v \neq 0\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(u,v) = \mathrm{Log}\big(u^2+2uv+v^2\big)\,.$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to D$ une fonction différentiable telle que $g(0,3) = (0,-3)$ et

$$J_g(0,3) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

où J_g est la matrice jacobienne de g. Si $h = f \circ g$, alors :

- ☐ $\nabla h(0,3) = (0,0)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\nabla h(0,3) = (6,0)^{\mathrm{T}}$
- ■ $\nabla h(0,3) = (8,-2)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\nabla h(0,3) = (0,6)^{\mathrm{T}}$

Question 8 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5+xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ f est continue en $(0,0)$, mais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- ■ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$

Question 9 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 y + e^{yz} \\ yz + x \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de f évaluée en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est :

- ☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} \\ 2zy & z & y \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2xy & 1 \\ x^2 + ze^{yz} & z \\ ye^{yz} & y \end{pmatrix}$
- ■ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} \\ 1 & z & y \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2xy & 2zy \\ x^2 + ze^{yz} & z \\ ye^{yz} & y \end{pmatrix}$

Question 10 : Soient la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et le champ de vecteurs $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définis par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{v}(x, y, z) = \left(\tfrac{1}{2}x^2\,,\ \tfrac{1}{2}y^2\,,\ \tfrac{1}{2}z^2\right)^{\mathrm{T}}.$$

Alors la fonction

$$g = \operatorname{div}(f\,\boldsymbol{v}) - f\ \operatorname{div}(\boldsymbol{v})$$

satisfait pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

- ☐ $g(x, y, z) = f(x, y, z)$
- ☐ $g(x, y, z) = 2\,\langle \nabla f, \boldsymbol{v} \rangle(x, y, z)$, avec $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$
- ☐ $g(x, y, z) = f\big(x^2, y^2, z^2\big)$
- ■ $g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$

Question 11 : L'ensemble

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \tfrac{1}{2}\,y^2 + \tfrac{1}{4}\,z^2 = 4\right\}$$

est le graphe d'une fonction différentiable dans un voisinage du point $p = (-1, 2, -2) \in S$. L'équation du plan tangent à S en p est :

- ☐ $x + y + z - 1 = 0$
- ■ $2x - 2y + z + 8 = 0$
- ☐ $x + y + z + 1 = 0$
- ☐ $x + y + z - 3 = 0$

Question 12 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = (1+x)\,y^2\,|z|^3 \ .$$

Alors la derivée directionnelle de f au point $(0,1,1)$ suivant le vecteur $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$ est égale à :

- [ ] -4
- [x] $2\sqrt{3}$
- [ ] 6
- [ ] $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$

Question 13 : Soient la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

et le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(x,y) = (1,-1)$,

$$p_2(x,y) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(y+1) + a_3(x-1)^2 + a_4(x-1)(y+1) + a_5(y+1)^2\,,$$

avec $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$. Alors le coefficient a_4 vaut :

- [x] $a_4 = -1$
- [ ] $a_4 = 1$
- [ ] $a_4 = -2$
- [ ] $a_4 = 2$

Question 14 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2xy - y^2$$

possède :

- [ ] deux points-selle et un point de minimum local
- [x] deux points-selle et un point de maximum local
- [ ] trois points-selle
- [ ] un point-selle, un point de maximum local et un point de minimum local

Question 15 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = (x-z)^2 + y^2$$

et soit $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Alors, sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$,

- [ ] la fonction f atteint son minimum absolu en un seul point
- [ ] la fonction f atteint son maximum absolu en un seul point
- [x] la fonction f atteint son maximum absolu en $\left(\sqrt{2}\,,\,0\,,\,-\sqrt{2}\right)$
- [ ] la fonction f n'est pas bornée

Question 16 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)\,dx \right) dy$$

est égale à :

- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$
- ■ $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x^2} f(x,y)\,dy \right) dx$

Question 17 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \le x^2 + y^2 \le 4\,,\ x \ge 0\,,\ -x \le y \le x\}$.
Alors l'intégrale

$$\int_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

vaut :

- ☐ $\dfrac{175\pi}{8}$
- ☐ $\dfrac{7\pi}{8}$
- ■ $\dfrac{7}{4}$
- ☐ $\dfrac{175}{4}$

Question 18 : Soit D la région de $\mathbb{R}^3$ délimitée par les quatre plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$. Alors l'intégrale

$$\int_D \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

vaut :

- ☐ $\sin(1) + 1$
- ☐ 1
- ■ $\frac{1}{2}\cos(1) + \sin(1) - 1$
- ☐ $\frac{1}{2}\cos(1)$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $y(x)$ une solution de l'équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre $y'' + x^2\, y' = 4$. Alors pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est aussi une solution de cette équation différentielle.

■ VRAI □ FAUX

Question 20 : Soit $(u_n)_{n \geq 1}$, avec $u_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, une suite divergente.
Alors $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite divergente dans $\mathbb{R}$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 21 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$. Alors en tout point $p \in \mathbb{R}^3$ la matrice jacobienne $J_f(p)$ est une matrice symétrique.

□ VRAI ■ FAUX

Question 22 : Soient $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D telle que $\lim\limits_{t \to 0} f(t,t) = 1$. Alors $\lim\limits_{t \to 0} f(t,0) = 1$ et $\lim\limits_{t \to 0} f(0,t) = 1$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 23 : Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deux fonctions différentiables. Alors en tout point $p \in \mathbb{R}^3$ les matrices jacobiennes de f, g, et $f + g$ satisfont

$$J_{f+g}(p) = J_f(p) + J_g(p)\,.$$

■ VRAI □ FAUX

Question 24 : Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable. Alors la fonction composée $f = g \circ g$ est différentiable, et en tout point $p \in \mathbb{R}^3$, les matrices jacobiennes de f et g satisfont

$$\det J_f(p) = \big(\det J_g(p)\big)^2\,.$$

□ VRAI ■ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$. Alors f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'au point $p \in \mathbb{R}^n$ la dérivée directionnelle existe suivant tout vecteur unité $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Alors f est différentiable en p.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 27 : Soient $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Si f n'est pas bornée sur D, alors f n'est pas continue sur D.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx \leq \int_0^2 \left(\int_0^2 f(x, y)\, dy \right) dx\ .$$

☐ VRAI ■ FAUX